

## Математические методы в физике

## Mathematical methods in physics

**1. Название:** Математические методы в физике

**Course title:** Mathematical methods in physics

**2. Лектор:** М.Е. Портной

**Ассистент:** К.А. Барышников

**Lecturer:** M.E. Portnoi

**Assistant:** K.A. Baryshnikov

### 3. Краткая аннотация:

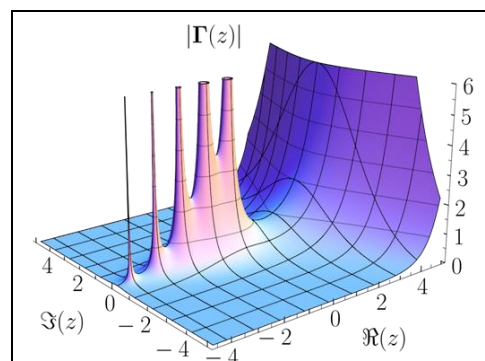
Успешная карьера в физике невозможна без глубокого знания ее языка – математики. Цель курса – научить базовым математическим методам, используемым в современных разделах физики: физике конденсированного состояния, теории неупорядоченных систем, физике наноструктур пониженной размерности и т.д. Курс ориентирован на развитие математического мышления и умения применять хорошо разработанные математические приемы для решения распространенных типов задач физики. Занятия проводятся в виде семинаров, на которых даются теоретические основы используемых математических методов, а затем разбираются примеры решения задач. Рассматривается широкий круг вопросов от теории функций комплексной переменной и специальных функций до избранных вопросов теории перколяции и основ теории групп.

### Short annotation:

A successful career in physics is impossible without a deep knowledge of her language – mathematics. The goal of the course is to teach basic mathematical methods used in modern branches of physics: condensed matter physics, the theory of disordered systems, low-dimensional nanostructures physics, etc. The course is focused on the development of mathematical thinking and the ability to apply well-developed mathematical techniques for solving commonly used types of problems in physics. Classes are held in the form of seminars, where in the first part theoretical foundations of the mathematical methods used are given, and then examples of problems are treated and solved. A wide range of issues from the theory of functions of a complex variable and special functions to selected questions of the percolation theory and the foundations of group theory are considered.

**5. Название программы и семестр:** Нанопотоника и метаматериалы, 1-й семестр.

**Study program and semester:** Nanophotonics and metamaterials, 1st semester.



**6. Детальное описание курса с разбиением по лекциям/семинарам/практикам:**

<b>I. Теория функций комплексной переменной</b>	
1) Функции комплексного переменного, отображения и точки ветвления, предел и непрерывность функций комплексной переменной, производная от функции комплексной переменной, условия Коши-Римана.	лекция
2) Интегрирование функции комплексной переменной, особые точки, ряды Лорана, теорема о вычетах.	лекция
3) Конформное преобразование.	семинар
<b>II. Вычисление интегралов и специальные функции</b>	
1) Использование симметрии при вычислении интегралов от функции, интегралы от четных и нечетных функций, интегрирование по контуру, лемма Жордана.	семинар
2) Гамма-функция, Бета-функция, функция ошибок, интегральная показательная функция, интегральные косинус и синус.	семинар
3) Решение уравнения Лапласа в цилиндрических и сферических координатах, функции Бесселя и их свойства, сферические функции и их свойства.	семинар
<b>III. Приближенные методы в физике</b>	
1) Асимптотический ряд, приближенные методы решений алгебраических уравнений, метод перевала (метод стационарной фазы).	лекция
2) Квазиклассическое приближение в квантовой механике (метод Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна).	семинар
3) Вариационные методы в квантовой механике.	семинар
<b>IV. Неупорядоченные системы и нелинейные явления</b>	
1) Протекание (перколяция) по решетке с дефектами, задача узлов, задача связей, кластеры, перколяционный переход для различных типов решеток.	семинар
2) Нелинейное уравнение Шрёдингера, оперирование бесконечностями в физических системах.	семинар
3) Линеаризация нелинейных систем дифференциальных уравнений, особые точки фазового пространства нелинейной динамической системы, бифуркация, аттрактор динамической системы.	семинар
<b>V. Интегральные преобразования и интегральные уравнения</b>	
1) Преобразование Фурье, дельта-функция и функция Грина.	семинар
2) Преобразование Лапласа, типы интегральных уравнений и методы их решения.	семинар
<b>VI. Теория групп и ее приложения</b>	
1) Определения и свойства абстрактной группы, классы сопряженности, группы трансляционной и вращательной симметрии и связанные с ними законы сохранения, теорема Блоха, теорема Вигнера, точечные группы симметрии.	лекция
2) Представления групп и их свойства, характер представления, произведение представлений, правила отбора, метод инвариантов.	семинар

**Detailed content and structure with sectioning of lectures/seminars:**

<b>I. Theory of functions of a complex variable</b>	
1) Functions of a complex variable, a mapping and a branch point, limit and continuity of functions of a complex variable, derivative of a function of a complex variable, Cauchy-Riemann condition.	lecture
2) Integration of the function of a complex variable, singular points, Laurent series, residue theorem.	lecture
3) Conformal mapping.	seminar
<b>II. Calculation of integrals and special functions</b>	
1) The use of symmetry in the calculation of integrals of a function, integrals of even and odd functions, integration over a contour, Jordan's lemma.	seminar
2) Gamma function, Beta function, error function, integral exponential function, integral cosine and sine.	seminar
3) Solution of the Laplace equation in cylindrical and spherical coordinates, Bessel functions and their properties, spherical functions and their properties.	seminar
<b>III. Approximate methods in physics</b>	
1) Asymptotic series, approximate methods for solving algebraic equations, the method of steepest descent (stationary phase method).	lecture
2) Quasiclassical approximation in quantum mechanics (Wentzel-Kramers-Brillouin method).	seminar
3) Variational methods in quantum mechanics.	seminar
<b>IV. Disordered systems and nonlinear phenomena</b>	
1) Percolation (percolation) in a lattice with defects, site percolation problem, bond percolation problem, clusters, percolation transition for various types of lattices.	seminar
2) Non-linear Schrödinger equation, tackling infinities in physical systems.	seminar
3) Linearization of nonlinear systems of differential equations, singular points of the phase space of a nonlinear dynamical system, bifurcation, attractor of a dynamical system.	seminar
<b>V. Integral transformations and integral equations</b>	
1) Fourier transform, delta function and Green function.	seminar
2) Laplace transform, types of integral equations and methods for solving them.	seminar
<b>VI. Group theory and its applications</b>	
1) Definitions and properties of an abstract group, conjugacy classes, translational and rotational symmetry groups and the associated conservation laws, the Bloch theorem, the Wigner theorem, point symmetry groups.	lecture
2) Representations of groups and their properties, character of representation, product of representations, selection rules, method of invariants.	seminar

## 7. Рекомендованная литература:

### Textbooks:

- [1] Arfken G.B. and Weber H.J. (2001), *Mathematical methods for physicists* (5th edn.), Academic Press, ISBN 0-120-59826-4.
- [2] Mathews J. and Walker R.L. (1970), *Mathematical Methods of Physics* (2nd edition), Benjamin, ISBN 0-805-37002-1.
- [3] Spiegel M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, (Chapter 13: Complex Variables and Conformal Mapping).
- [4] Spiegel M.R., *Complex Variables*, (any edition), McGraw-Hill.
- [5] Stauffer D. (1985), *Introduction to Percolation Theory*, Taylor and Francis, ISBN 0-850-663156 (UL: 530.13 STA).
- [6] Efros A.L. (1986), *Physics and Geometry of Disorder*, Mir Publishers.
- [7] Anselm A. (1981), *Introduction to Semiconductor Theory*, Mir Publishers.

**8. Предварительно пройденные курсы, необходимые для изучения предмета:** Линейная алгебра, Математический анализ, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Математическая физика, Общая физика.

### Course prerequisites:

Linear algebra, Mathematical analysis, Ordinary Differential Equations, Mathematical physics, General physics.

## 9. Тип самостоятельных заданий:

### Assignments:

#### Homework problems example:

- 1) Evaluate integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(\omega t) t dt}{t^2 + \tau^2}, \text{ at } \omega, \tau > 0.$$

Use Euler formula and Jordan lemma correctly.

- 2) Consider the Cauchy problem for diffusion equation ( $D = \text{const} > 0$ )

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x), \quad u(0, x) = \delta(x) \leftarrow \text{delta function}, \quad u(t, \pm\infty) \rightarrow 0.$$

- a) Please write down by which one variable ( $x$  or  $t$ ) it is appropriate to apply the Fourier transform, and which one variable corresponds rather to the Laplace transform? Why?
- b) Please solve this Cauchy problem applying appropriately Fourier and Laplace transforms, and after this taking their inverse transforms.

#### Colloquium problems example:

- 1) Find the limit using l'Hopital rule:  $\forall \beta > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\beta}$
- 2) Find real and imaginary parts of  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$
- 3) Use the Cauchy-Riemann theorem to find out which of the following functions is analytic:  $f(z) = \cos(z)$

- 4) Evaluate integral  $\int_0^{1+i} z^2 dz$  along the straight line joining 0 and  $1 + i$  in  $\mathbb{C}$ .
- 5) Evaluate integrals:
- a)  $\int_0^\infty dx/(1+x^4)$
- b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy xy(x^2 - y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
- 6) Using the definition of Bessel function

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x/2)^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

where  $n \in \mathbb{N}$  and using the property of Gamma function:

$$\frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = 0 \text{ at } k = 0, \dots, n-1 \text{ and } \frac{1}{\Gamma(-n+k+1)} = \frac{1}{(k-n)!} \text{ at } k \geq n,$$

find the connection between  $J_{-n}(x)$  and  $J_n(x)$ .

- 7) \* Find the eigenenergies of the quantum mechanical system with initial Hamiltonian

$$H_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \Delta > 0, \text{ which is perturbed by a potential } V = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ b & b & b \\ -b & b & -b \end{pmatrix}. \text{ The condition } 0 < b \ll \Delta \text{ is satisfied.}$$

#### Exam problem example:

The electron starts to move in an external periodically varying electric field at  $t = 0$  in an environment where friction may be retarded. The equation of motion of the electron in this medium is written as

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{\tau} \int_0^t v(t-t') \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) dt' = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t.$$

Find a well-established periodical solution for  $v(t) = v_e(t)$  at  $t \gg \tau, \lambda^{-1}$  when  $\lambda\tau \ll 1$  and  $\omega\tau \ll 1$  (i.e.  $\tau \rightarrow 0$ );

[10]

#### **10. Как оценивается успеваемость по курсу:**

Оценка за коллоквиум выше либо равная «3» является допуском к экзамену с 0 штрафных баллов.

Если оценка за коллоквиум ниже «3» или коллоквиум не писался, то к экзамену студент допускается с 20 штрафными баллами, которые вычитаются из общего числа баллов за экзамен.

На усмотрение преподавателя для допуска к экзамену без начисления штрафных баллов студенту может быть засчитано выполнение общих или индивидуальных домашних работ по курсу.

Оценка за письменный экзамен – максимум 100 баллов:

Для оценки «5» необходимо набрать минимум 70 баллов;

Для оценки «4» необходимо набрать минимум 50 баллов;

Для оценки «3» необходимо набрать минимум 40 баллов;

Если набрано менее 40 баллов – экзамен не сдан.

**Grading policy:**

The mark for a colloquium higher than or equal to «3» is an exam qualification with 0 penalty points.

If the mark for a colloquium below «3» or if the colloquium was not written, then a student is allowed to the exam with 20 penalty points, which are subtracted from the total number of points for the exam.

At the discretion of the teacher for admission to the exam without calculating the penalty points, the student may be credited with performing general or individual homework for the course.

Maximum mark for the written exam is 100 points:

To get mark “3” minimum **40** points should be attained.

To get mark “4” minimum **50** points should be attained.

To get mark “5” minimum **70** points should be attained.

**Less** than 40 points attained means the exam is not passed.

**11. Дополнительные комментарии:** курс читается на английском языке, длительность всех лекций и семинаров рассчитана на 3 астрономических часа.

**Additional comments:** the course language is English, the duration of all lectures and seminars is designed for 3 astronomical hours.