1. **Название:**Линейная алгебра.
Course title: Linear algebra.

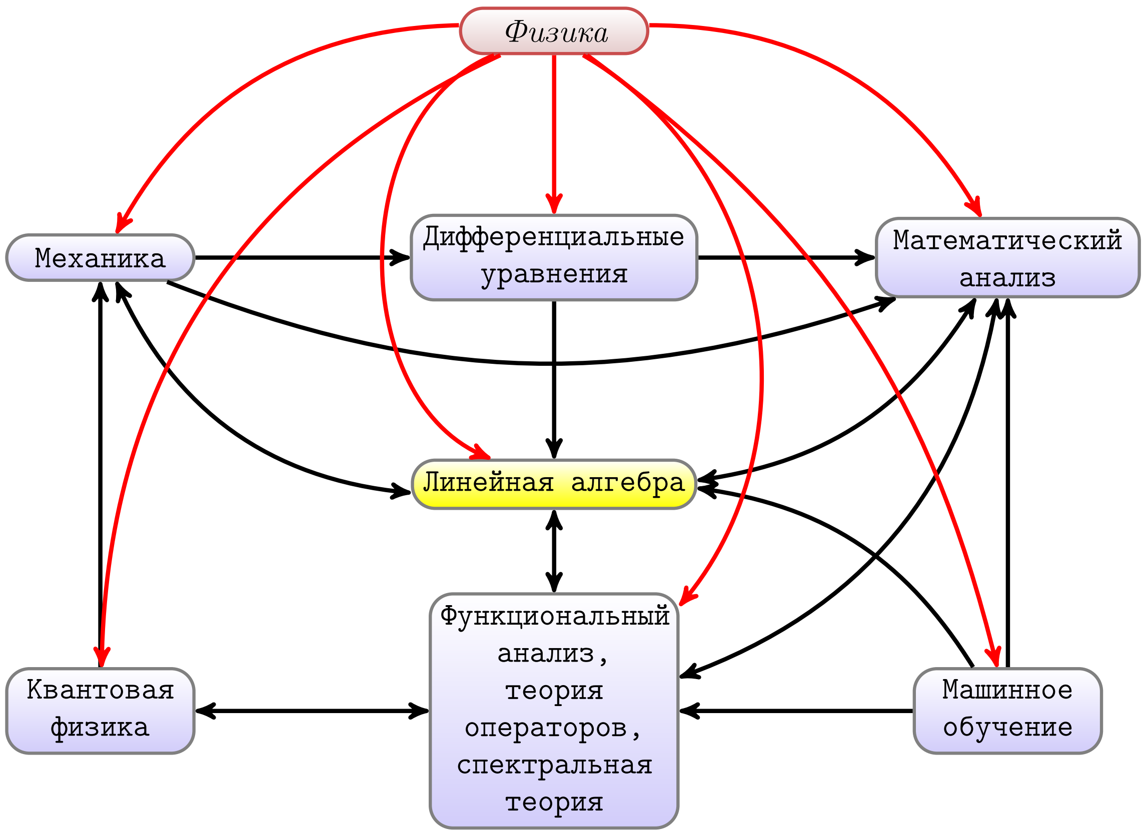
2. **Лектор**: Матвеенко Сергей Георгиевич
Lecturer: Matveenko Sergey

3. **Краткая аннотация:**

Линейная алгебра является одним из базовых курсов, лежащих в основании математического образования физика. Линейные зависимости — самые простые из всех функциональных зависимостей, встречающихся в природе, и поэтому наиболее глубоко изученные. Идеи линейной алгебры лежат в основе таких разделов науки, как квантовая механика, математическая физика, экстремальные задачи, машинное обучение, эконометрика и многие другие. В рамках курса слушатели изучат свойства систем линейных уравнений, познакомятся с основами матричного и тензорного исчисления, теорией операторов в конечномерном пространстве, аналитической геометрией на плоскости и в пространстве, а также получат представление о функциональном анализе.

Annotation
The detailed study of linear algebra is of great importance for the mathematical education of a physicist. Linear dependence is the simplest of all dependencies encountered in nature and therefore is the most studied. Notions and ideas of linear algebra underlie such branches of science as quantum mechanics, mathematical physics, extremal problems, machine learning, econometrics, etc. The course embraces a wide range of topics: properties of linear systems, matrix and tensor analysis, operator theory in finite dimension spaces, plain and spatial analytic geometry and some preliminaries about functional analysis.

Примерное место линейной алгебры среди других изучаемых дисциплин



Пояснение к схеме: Стрелка от блока A к блоку B указывает на необходимость изучения дисциплин из блока B для понимания дисциплины в блоке A

5. **Название программы и семестр:** бакалавриат “Нанофотоника и метаматериалы”, 1ый и 2ой семестры.

6. **Детальное описание курса**

Тема I. Векторные пространства

1. Алгебраические структуры: группы, поля (определения, простейшие свойства, примеры)

2. Векторные пространства (определения, простейшие свойства, примеры)

3. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

4. Подпространство, линейная оболочка системы векторов

5. Теорема о линейной зависимости линейных комбинаций

6. Базис, эквивалентность четырёх определений, координаты вектора в базисе

7. Размерность пространства, её независимость от выбора базиса пространства, существование базиса в конечномерном пространстве, дополнение до базиса линейно независимой системы

8. Отношение эквивалентности, фактормножество, факторпространство

Тема II. Геометрия подпространств

9. Определения и свойства пересечения и суммы подпространств, размерность подпространства

10. Теорема о размерности суммы подпространств

11. Прямая сумма подпространств, дополнение подпространства, размерность дополнения, проекция на подпространство

Тема III. Линейные операторы

12. Линейные отображения пространств, векторное пространство линейных операторов

13. Изоморфизм, изоморфность всех векторных пространств одинаковой размерности

14. Векторное пространство линейных функционалов, сопряжённое пространство, двойственный базис

15. Второе сопряжённое пространство, канонический изоморфизм между векторным пространством и его вторым сопряжённым. Лемма о достаточном числе функционалов

16. Линейный оператор, линейное пространство линейных операторов, ядро, образ, ранг и дефект оператора

17. Теорема о размерности образа подпространства, связь размерностей образа и ядра оператора

18. Сопряжённый оператор, его существование и единственность, операция сопряжения как изоморфизм векторных пространств

19. Лемма об аннуляторе образа оператора, три следствия из неё

20. Лемма о размерности аннулятора подпространства, теорема Фредгольма

Тема IV. Матрица оператора

21. Матрица оператора, изоморфность пространства операторов пространству матриц, матрица сопряжённого оператора

22. Строчной и столбцовый ранг, связь ранга оператора и ранга матрицы, сохранение размерности при изоморфизме

23. Алгебра линейных операторов и алгебра матриц

24. Сопряжённый оператор композиции и сопряжённый обратного оператора

25. Транспонирование произведения матриц и транспонированная обратная матрица

26. Матрица оператора при замене координат, подобные операторы

Тема V. Системы линейных уравнений

27. Метод Гаусса

28. Пространство решений однородной системы линейных уравнений, фундаментальная система решений

29. Теорема Кронекера-Капелли

Тема VI. Теория определителей

30. Перестановки, транспозиции, их свойства, лемма о чётности числа инверсий перестановки

31. Определитель: определение, доказательство существования и единственности

32. Лемма об общем правиле знака, определитель транспонированной матрицы, определитель, как функции строк и столбцов матрицы

33. Определитель при элементарных преобразованиях

34. Определитель блочной матрицы

35. Определитель произведения матриц

36. Определитель оператора: определение, корректность, свойства, инвариантность относительно подобия, определитель обратного оператора

37. Разложение определителя по элементам строки или столбца

38. Теорема о ранге матрицы (эквивалентность четырёх определений)

39. Обратный оператор, обратная матрица, формулы Крамера

Тема VII. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

40. Векторы на плоскости и в пространстве как линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ размерности 2 и 3

41. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, единственность, свойства, вычисление в координатах

42. Уравнения прямой в $\mathbb{R}^2$ и плоскости в $\mathbb{R}^3$

43. Расстояние от точки до плоскости в пространстве, расстояние от точки до прямой на плоскости, направленные расстояния, параллельные прямые и плоскости

44. Уравнение прямой в пространстве и на плоскости, различные виды уравнения прямой

45. Понятие ориентации на плоскости и в пространстве

46. Смешанное произведение в $\mathbb{R}^3$, его свойства, объём параллелепипеда, вычисление смешанного произведения в координатах

47. Векторное произведение в $\mathbb{R}^3$, его свойства, вычисление векторного произведения в координатах

48. Формула двойного векторного произведения, формула Якоби

Тема VIII. Алгебра многочленов

49. Алгебра многочленов

50. Деление с остатком, алгоритм Евклида, линейное представление наибольшего общего делителя, теорема Безу

51. Основная теорема алгебры над полем $\mathbb{C}$ и над полем $\mathbb{R}$

52. Теорема Виета

Тема IX. Спектральная теорема для линейных операторов в конечномерном пространстве.

53. Спектр оператора, его инвариантность относительно подобия

54. Характеристический многочлен, его инвариантность относительно подобия, связь корней характеристического многочлена и спектра оператора

55. Инвариантные подпространства оператора, свойства собственных векторов, отвечающих различным собственным числам

56. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного числа

57. Спектральная теорема для диагонализуемых операторов

58. Алгебра операторных полиномов, теорема Кэли-Гамильтона

59. Минимальный аннулирующий многочлен, его свойства

60. Свойства ядра операторного полинома, теорема о разложении ядра операторного полинома

61. Корневые подпространства, высота вектора, инвариантность корневого подпространства, описание корневых подпространств оператора

62. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств

63. Нильпотентные операторы, высота оператора, лемма о циклическом подпространстве, неразложимость циклического подпространства

64. Теорема о разложении пространства в прямую сумму циклических неразложимых подпространств

65. Спектральная теорема: структура жордановой формы

66. Построение базиса Жордана

67. Спектральная теорема: единственность разложения оператора в сумму нильпотентного и диагонализуемого операторов. Полиномиальная зависимость от оператора его нильпотентной и диагонализуемой составляющей.

Тема X. Функциональное исчисление операторов

68. Функции от операторов и матриц

69. Метрика, метрическое пространство, полнота.

70. Принцип сжимающих отображений.

71. Норма, метрика, порождённая нормой, эквивалентность норм, сходимость по эквивалентным нормам, примеры различных норм.

72. Компактность сферы и шара в конечномерном пространстве.

73. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве. Полнота конечномерного пространства.

74. Понятие о дифференцируемости и интегрируемости операторнозначных функций.

75. Теорема о существовании и единственности решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

76. Размерность пространства решений однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

77. Операторная норма в бесконечномерном пространстве.

78. Функции от оператора.

79. Алгебра функций от оператора, её связь с алгеброй операторных полиномов.

80. Операторная экспонента.

81. Явное решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

82. Свойства операторной экспоненты.

83. Явное решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Тема XI. Унитарные и гильбертовы пространства

84. Полуторалинейные формы, билинейные формы. Определения невырожденной, положительно определённой, неотрицательно определённой, симплектической, эрмитовой форм.

85. Полуторалинейная форма однозначно определяется своими значениями на диагонали (Квадратичная форма однозначно определяет полуторалинейную форму).

86. Скалярное произведение, унитарное пространство.

87. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

88. Норма, порождённая скалярным произведением.

89. Тождество параллелограмма. Теорема Пифагора.

90. Теорема о ближайшей точке выпуклого замкнутого множества.

91. Непрерывность скалярного произведения.

92. Ортогональность, ортогональное дополнение, его замкнутость, двойственность ортогонального дополнения, ортогональное дополнение суммы и пересечения подпространств, прямая ортогональная сумма подпространств.

93. Шар и сфера не компактны в бесконечномерном унитарном пространстве.

94. Лемма о ближайшем элементе подпространства, ортогональный проектор, свойства, характеризация операторов ортогонального проецирования.

95. Лемма о ядре линейного функционала. Теорема Рисса.

96. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, теорема об ортонормированной системе в конечномерном унитарном пространстве.

97. Матрица Грама, её свойства, матрица Грама системы векторов, связь с линейной независимостью.

98. Ортогонализация Грама-Шмидта.

99. Сопряжённый оператор в унитарном конечномерном пространстве, его существование, линейность и корректность определения.

100. Свойства сопряжённого оператора, матрица сопряжённого оператора.

101. Лемма об инвариантном подпространстве оператора и его сопряжённого.

102. Нормальный оператор, леммы о собственных векторах нормального оператора.

103. Спектральная теорема для нормальных операторов Функциональное исчисление нормальных операторов.

104. Теорема Фредгольма в унитарном пространстве.

105. Понятие об объёме и ориентации параллелепипеда в многомерном пространстве.

106. Унитарные операторы и их свойства.

107. Действие унитарного оператора на базис, матрица унитарного оператора.

108. Лемма Шура.

109. Теорема о характеризации спектра.

110. Три эквивалентных определения положительного оператора в унитарном пространстве. Квадратный корень из положительного оператора.

Тема XII. Квадратичные формы

111. Квадратичная форма: определение, взаимно однозначное соответствие с операторами.

112. Квадратичная форма самосопряжённого оператора.

113. Нормальный вид квадратичной формы в ортонормированном базисе.

114. Одновременное приведение к нормальному виду двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

115. Закон инерции квадратичных форм, сигнатура квадратичной формы, классификация квадратичных форм.

116. Метод Лагранжа приведения к канонической форме. Критерий Сильвестра. Формула Якоби.

Тема XIII. Максиминимальный принцип

117. Теорема Гильберта-Шмидта и её следствия.

118. Теорема о полярном разложении.

119. Максиминимальный принцип.

Тема XIV. Тензорная алгебра

120. Тензорное произведение над полем Полилинейные функции.

121. Универсальное свойство тензорного произведения. Доказательство равносильности определений тензорного произведения пространств. Определение тензора.

122. Связь между тензорным произведением пространств и пространством полилинейных отображений.

123. Базис и размерность тензорного произведения векторных пространств.

124. Ковариантные, контравариантные тензоры,тензора типа (p, q).

125. Линейные операторы и тензорное произведение пространства с сопряжённым к нему.

126. Свёртка тензоров.

127. Преобразование тензора при замене координат.

Возможные дополнительные темы

128. Определение центра масс, существование, единственность, теорема о группировке масс, центр масс двух точек, параметризация отрезка

129. Момент инерции относительно точки, теорема Лагранжа, тождество Якоби

130. Треугольный вид матрицы оператора

131. Семейство коммутирующих операторов. Приведение к треугольной форме матриц коммутирующих операторов.

132. Необходимое и достаточное условие коммутируемости операторов, один из которых является нормальным.

133. Классификация поверхностей второго порядка.

134. Тензорное произведение операторов, его свойства.

135. Кронекеровское произведение матриц.

136. Тензор полилинейной формы, валентность тензора.

137. Прямое (тензорное) произведение форм.

138. Симметрические и антисимметрические полилинейные формы, критерий антисимметричности.

139. Симметризация и антисимметризация.

140. Базис и размерность пространства антисимметрических форм валентности $(p, 0)$.

141. Внешняя алгебра, свойства

142. Внешнее произведение, его свойства.

143. Условие линейной независимости в терминах внешней алгебры.

144. Теория определителей на языке внешней алгебры.

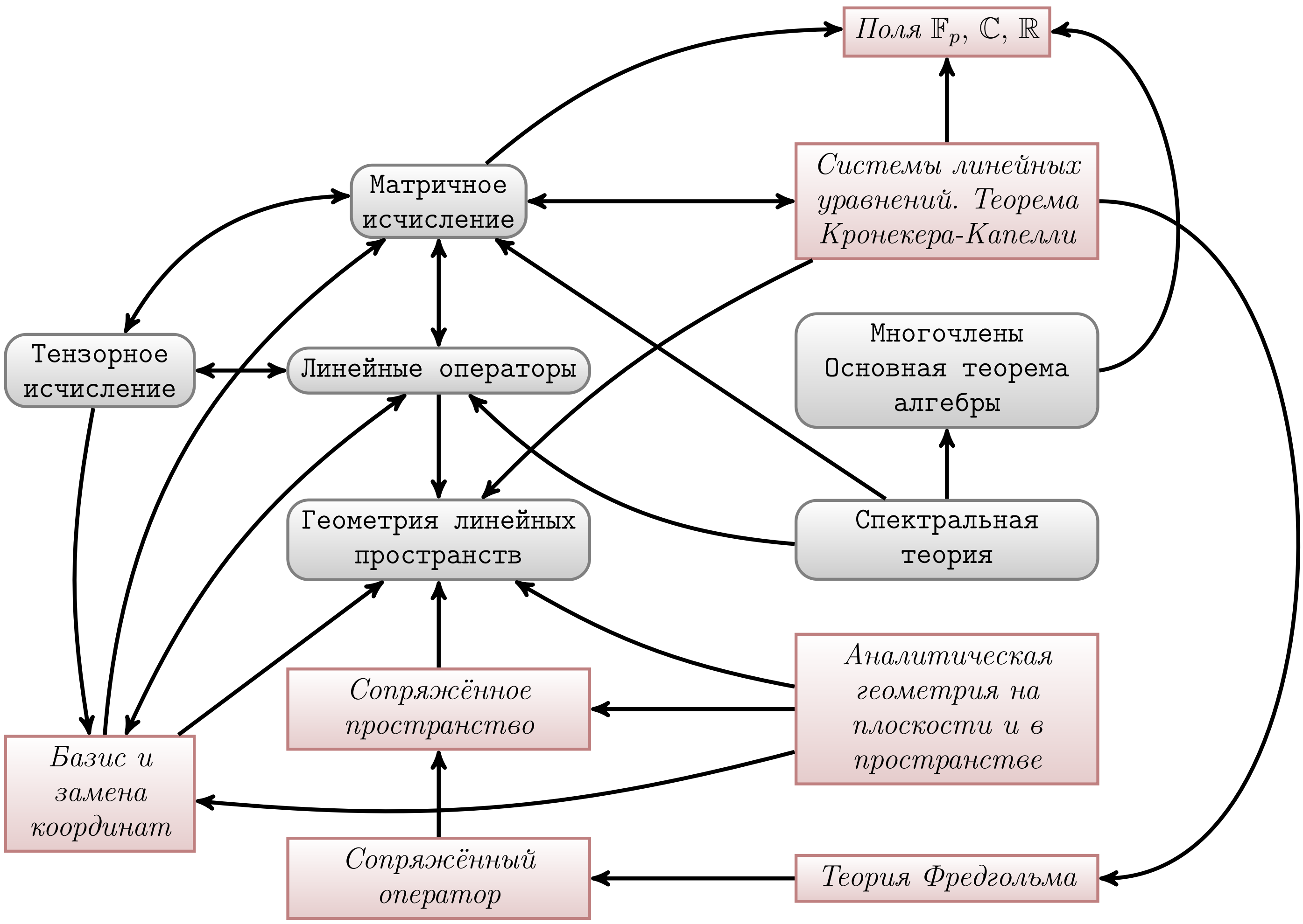
145. Теорема Бине-Коши.

146. Теорема Лапласа.

147. Внешняя алгебра полилинейных кососимметрических форм. Внешнее произведение.

148. Звезда Ходжа.

Схема первой половины курса (темы I – IX)



Пояснение к схеме:

- в серых блоках выделены самодостаточные фундаментальные разделы математики
- в красных блоках указаны частные разделы или подразделы, обеспечивающие связность и целостность материала либо имеющие прикладное значение
- стрелка обозначает связь между дисциплинами, направление показывает, на результаты какого раздела опирается данная тема

7. Ключевые навыки, осваиваемые в процессе изучения курса

Ключевые определения и свойства:

- группа, абелева группа, поле, векторное пространство, алгебра
- линейная независимость, порождаемость, базис, размерность, линейная оболочка
- отношение эквивалентности, фактормножество, факторпространство
- линейный оператор, линейный функционал, изоморфизм, ядро, образ
- сопряжённое пространство, канонический изоморфизм между пространством и его вторым сопряжённым
- прямая сумма подпространств
- сопряжённый оператор
- аннулятор подпространства
- определитель и все его свойства
- обратный оператор, формула для обратной матрицы
- основная теорема алгебры
- характеристический многочлен
- спектр оператора
- нильпотентные и диагонализуемые операторы
- корневое подпространство, клетка Жордана, циклическое инвариантное подпространство
- метрика, метрическое пространство, полнота, норма (определения, связь этих понятий)
- определение функций от оператора, определение и свойства операторной экспоненты

- билинейная, полуторалинейная, квадратичная, невырожденная, положительно определённая, неотрицательно определённая, симплектическая, эрмитова формы
- скалярное произведение, унитарное пространство, ортогональная сумма подпространств
- определение и свойства (в том числе характеризация) ортогонального проектора
- сопряжённый оператор в унитарном конечномерном пространстве, свойства операции сопряжения
- нормальный и самосопряжённый оператор
- классификация поверхностей второго порядка
- унитарные операторы и их свойства
- проектор вдоль подпространства, ортогональный проектор
- определения положительного оператора в унитарном пространстве
- тензорное произведение пространств над полем (над кольцом), все его свойства
- определение ковариантных, контравариантных тензоров,тензора типа (p, q)

Ключевые теоремы:

- теорема Кронекера-Капелли
- теорема о размерности суммы подпространств
- теорема о размерности образа подпространств
- спектральная теорема для диагонализуемых операторов
- спектральная теоремы: о структуре жордановой формы, о разложении оператора в сумму диагонализуемого и нильпотентного
- принцип сжимающих отображений
- эквивалентность норм в конечномерных подпространствах
- неравенство Коши-Буняковского-Шварца
- тождество параллелограмма, теорема Пифагора
- ортогональность, ортогональное дополнение и его свойства
- теорема Рисса
- неравенство Бесселя, тождество Парсеваля
- матрица Грама, её связь с объёмом параллелепипеда в многомерном пространстве
- спектральная теорема для нормальных операторов
- теорема Фредгольма
- лемма Шура
- теорема о характеризации спектра
- закон инерции квадратичных форм, сигнатура квадратичной формы
- критерий Сильвестра, формула Якоби
- теорема Гильберта-Шмидта и её следствия
- теорема о полярном разложении
- максиминимальный принцип
- универсальное свойство тензорного произведения
- теорема Бине-Коши

Важные навыки и умения:

- приведение матрицы к жордановой форме, построение базиса Жордана
- вычисление экспоненты от оператора
- ортогонализация Грама-Шмидта системы векторов
- вычисление функции от нормального оператора
- построение оператора (в некоторых случаях, самосопряжённого) по квадратичной форме
- извлечение квадратного корня из положительного оператора
- приведение к нормальному виду квадратичной формы методом Лагранжа и при помощи унитарного преобразования
- одновременное приведение к нормальному виду двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена
- описание базиса тензорного произведения пространств
- интерпретация линейного оператора, билинейной формы, полилинейной формы, как тензоров
- свёртка тензоров
- преобразование тензора при замене координат, частные случаи: изменение координат вектора, координат функционала, матрицы линейного оператора, матрицы квадратичной формы

- подъём и спуск индекса
- тензорное произведение операторов, кронекеровское произведение матриц
- произведение тензоров, симметризация, альтернирование, симметрическое произведение и внешнее произведение тензоров
- построение базиса в симметрической и внешней тензорных алгебрах

7. **Рекомендованная литература:**

a) основная литература:

1. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. - 264 с.
2. Фаддеев Д.К., Лекции по алгебре, - М.: Наука, 1984. - 416 с.
3. Булдырев В.С., Павлов Б.С., Линейная алгебра и функции многих переменных, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1985. - 496 с.

b) дополнительная литература:

1. Беллман Р.Э., Введение в теорию матриц, М.: Наука, 1969. - 368 с.
2. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. - 320 с.
3. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, 5-е изд. - М.: Физматлит, 2004.- 560с.
4. Шафаревич И.Р., Основные понятия алгебры, Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика"Ижевская республиканская типография, 1999. - 348 стр. ISBN 5-80806-022-7.
5. Библиотечка Квант. Выпуск 061. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. - 160 с. - (Библиотечка Квант. Выпуск 61).
6. Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М.: Интеграл-Пресс, 1998. - 208 с. - ISBN 5-89602-010-4.

c) Задачники:

1. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977
2. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969

8. **Предварительно пройденные курсы, необходимые для изучения предмета:** не требуются.

9. **Тип самостоятельных заданий**

- В курсе запланирован цикл домашних заданий для иллюстрации и лучшего понимания основного материала курса
- В рамках семинарских занятий студенты самостоятельно решают задачи в аудитории

Примеры задач из домашнего задания

1. При каких α, β, γ, δ система совместна?

$$\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = \alpha; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = \beta; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = \gamma; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = \delta. \end{cases}$$

2. Если $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A на пространстве $\mathbb{C}^2$ в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Какова будет матрица оператора A в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$? А в базисе $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

3. Пользуясь свойствами определителя, вычислить

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{pmatrix};$$

4. Доказать, что для любых четырёх точек A, B, C, D выполняется равенство

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{AC} \cdot \vec{DB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0$$

5. В некотором базисе $\mathfrak{e}$ оператор A задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, Вычислите в этом базисе e^A.

10. **Как оценивается успеваемость по курсу:** устный экзамен с оценкой по пятибальной шкале.