

# Дифференциальные уравнения

## Differential equations

**1. Название:** Дифференциальные уравнения.

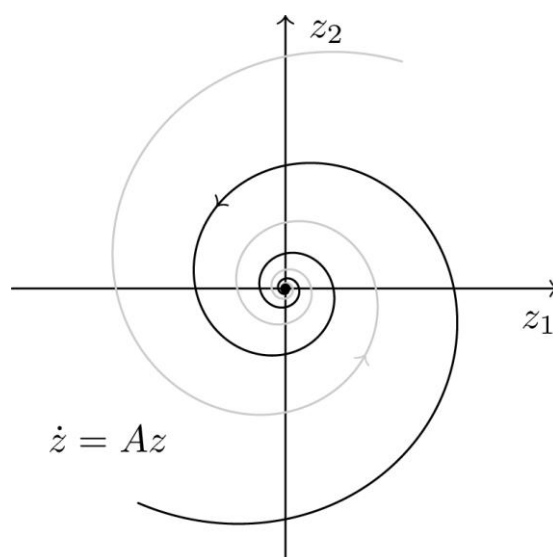
**Course title:** Differential equations.

**2. Лектор:** Максим Бабушкин.

**Ассистенты:** -

**Lecturer:** Maksim Babushkin.

**Assistants:** -



### 3. Краткая аннотация:

Дифференциальные уравнения являются основным инструментом математического моделирования физических, химических, биологических, экономических, а также многих других процессов и явлений. В данном курсе изучаются различные типы обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Подробно рассматриваются как способы явного нахождения решений, так и качественные методы исследования. Строгое изложение теории иллюстрируется конкретными примерами из прикладных областей знания. Содержащиеся в курсе сведения, в частности, необходимы для дальнейшего изучения уравнений математической физики.

### Short annotation:

Differential equations are the main tool for mathematical modeling of physical, chemical, biological, economical and many other processes and phenomena. This course is about various types of ordinary differential equations and their systems. We study in detail explicit methods of solving the equations as well as qualitative methods. Rigorous theory is illustrated by concrete examples from applied fields of knowledge. In particular, the information contained in the course forms the basis for further study of mathematical physics equations.

**5. Название программы и семестр:** бакалавриат «Нанопотоника и квантовая оптика», 3 семестр.

**Study program and semester:** bachelor program “Nanophotonics and quantum optics”, 3<sup>rd</sup> semester.

**6. Детальное описание курса с разбиением по лекциям/семинарам/практикам:**

### План лекций

№	Тема
1	Введение. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка.
2	Уравнения, не разрешённые относительно производной. Методы понижения порядка.
3	Дифференциальные многочлены. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.
4	Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Выделение вещественных решений.
5	Однородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.
6	Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение систем с помощью матричной экспоненты.
7	Теоремы существования и единственности для нормальной системы и для уравнения произвольного порядка.
8	Лемма Гронуолла. Глобальная теорема единственности. Продолжение решений задачи Коши.
9	Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной. Особые решения.
10	Линейные системы уравнений с переменными коэффициентами. Вронскиан и его свойства.
11	Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Уравнения второго порядка. Теорема Штурма о сравнении.
12	Автономные системы уравнений. Классификация положений равновесия.
13	Теория устойчивости.
14	Уравнения в частных производных первого порядка.
15	Элементы нелинейной динамики.

### План практических занятий

№	Тема
1	Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения. Линейные уравнения первого порядка. Составление дифференциальных уравнений.
2	Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнение в полных дифференциалах. Уравнения Лагранжа и Клеро.
3	Методы понижения порядка.
4	Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.
5	Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод исключения. Однородные системы.
6	Неоднородные системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение систем с помощью матричной экспоненты.
7	Контрольная работа №1.
8	Исследование задачи Коши. Метод последовательных приближений.
9	Задача Коши для уравнения, не разрешённого относительно производной. Особые решения.

10	Линейные системы с переменными коэффициентами. Решение уравнений при помощи степенных рядов.
11	Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Уравнения второго порядка. Качественное исследование решений.
12	Автономные системы уравнений. Исследование положений равновесия.
13	Исследование решений на устойчивость. Линеаризация нелинейных систем.
14	Уравнения в частных производных первого порядка.
15	Контрольная работа №2.

**Detailed content and structure with sectioning of lectures/seminars:**

**Lectures plan**

№	Topic
1	Introduction. Solving methods for the simplest types of the first order differential equations.
2	Implicit differential equations. Reduction of order methods.
3	Differential polynomials. Linear homogeneous equations with constant coefficients.
4	Linear nonhomogeneous equations with constant coefficients. Finding real solutions.
5	Homogeneous systems of linear equations with constant coefficients.
6	Nonhomogeneous systems of linear equations with constant coefficients. Application of matrix exponential to solving the systems.
7	Existence and uniqueness theorems for normal system and for equation of arbitrary order.
8	Gronwall lemma. Global theorem of existence. Extension of solutions of initial value problem.
9	Initial value problem for implicit differential equation. Singular solutions.
10	Linear systems of equations with variable coefficients. Wronskian and its properties.
11	Linear equations with variable coefficients. Equations of the second order. Sturm comparison theorem.
12	Autonomous systems. Equilibrium points classification.
13	Stability theory.
14	Partial differential equations of the first order.
15	Elements of nonlinear dynamics.

**Seminars plan**

№	Topic
1	Separable differential equations, homogeneous equations. Linear equations of the first order. Deriving the differential equations.
2	Bernoulli equation, Riccati equation. Exact differential equation. Lagrange and Clairaut equations.
3	Reduction of order methods.
4	Linear equations with constant coefficients. Euler equation.
5	Systems of linear equations with constant coefficients. Elimination method. Homogeneous systems.

6	Nonhomogeneous systems of linear equations with constant coefficients. Solving the systems with the matrix exponential.
7	Test №1.
8	Analysis of initial value problem. Method of successive approximations.
9	Initial value problem for implicit differential equation. Singular solutions.
10	Linear systems with variable coefficients. Solving the equations with power series.
11	Linear equations with variable coefficients. Equations of the second order. Qualitative analysis of solutions.
12	Autonomous systems. Analysis of equilibrium points.
13	Stability analysis of solutions. Linearization of nonlinear systems.
14	Partial differential equations of the first order.
15	Test №2.

### 7. Рекомендованная литература:

1. В. К. Романко, Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — 4 изд. — Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
2. В. К. Романко, Н. Х. Агаханов, В. В. Власов, Л. И. Коваленко, Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению / под ред. В. К. Романко. — 5 изд. — Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
3. А. Ф. Филиппов, Введение в теорию дифференциальных уравнений. — 2 изд. — Москва: КомКнига, 2007.
4. А. Ф. Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
5. М. Л. Краснов, А. И. Киселёв, Г. И. Макаренко, Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. — 4 изд. — Москва: Едиториал УРСС, 2002.
6. Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н. Дифференциальные уравнения. Методы решений. — 2 изд. — Москва: МФТИ, 2012.

### Textbooks:

1. Romanko V. K. Course of differential equations and calculus of variations. – Moscow, 2015 [in Russian].
2. V. K. Romanko, N. H. Agahanov, V. V. Vlasov, L. I. Kovalenko, Problems in differential equations and calculus of variations – Moscow, 2015 [in Russian].
3. A. F. Filippov, Introduction to theory of differential equations. — Moscow, 2007 [in Russian].
4. A. F. Filippov, Problems in differential equations. — Izhevsk, 2000 [in Russian].
5. M. L. Krasnov, A. I. Kiselev, G. I. Makarenko, Ordinary differential equations: Problems and examples with detailed solutions. — Moscow, 2002 [in Russian].
6. V. M. Ipatova, O. A. Pyrkova, V. N. Sedov, Differential equations. Methods of solving. — Moscow, 2012.

### 8. Предварительно пройденные курсы, необходимые для изучения предмета:

Математический анализ, линейная алгебра.

### Course prerequisites:

Calculus, linear algebra.

### **9. Тип самостоятельных заданий:**

- На практических занятиях студенты получают задачи для самостоятельного решения. В конце каждого занятия выдаётся домашнее задание.
- В курсе предусмотрены две большие домашние работы, содержащие задачи по всему пройденному материалу в каждом модуле. Эти работы требуется не только сдать на проверку, но и защитить, то есть устно ответить на вопросы преподавателя по данной работе.
- В конце каждого модуля на занятиях проводятся контрольные работы.

### **Assignments:**

- On seminars students are given problems for solving in class. At the end of each class they get a home task.
- There are two big home works with problems covering all the material studied in each module. It is required not only to submit the assignments for checking but also to answer the additional questions concerning the work.
- Students are given a test at the end of each module.

### **10. Как оценивается успеваемость по курсу:**

- Работа в течение семестра оценивается от 0 до 100 баллов.
- Студент допускается к сдаче экзамена, если он набрал не менее 60 баллов.
- Ответ на экзамене оценивается по пятибалльной шкале. Для получения оценки «отлично» необходимо иметь не менее 80 баллов за семестр.
- Итоговая оценка за курс совпадает с экзаменационной.

### **Grading policy:**

- The work during semester is grading from 0 to 100 points.
- A student is permitted to take the exam only if he has scored at least 60 points.
- Five-point grading scale is used on the exam. To get the highest mark 5(A) it is necessary to have at least 80 points for the semester work.
- The final grade coincides with the examination result.

### **11. Дополнительные комментарии:**

#### **Additional comments:**