

Теория групп и представлений

1. Название: Теория групп и представлений

2. Лектор: Киселев Алексей Дониславович

3. Краткая аннотация (500-700 символов, на простом и доступном языке):

В курсе излагаются основные понятия и результаты теории групп и их представлений, лежащие в основе математических методов симметричного анализа физических систем. Помимо дискретных групп конечного порядка, которым в курсе уделено основное внимание, студенты также познакомятся с примерами основных матричных непрерывных групп (общая теория групп Ли в курсе не рассматривается). Студенты узнают как классифицируются квантовые состояния молекулярных систем, как выводятся правила отбора и как строятся нормальные моды колебательных систем. К особенностям курса относится обсуждение численных методов симметричного анализа и знакомство с использованием свободно распространяемого пакета программ GTPack для системы Wolfram Mathematica (gtpack.org).

4. Название программы и семестр:

5-й семестр, 6-й семестр

5. Детальное описание курса с разбиением по лекциям/семинарам/практикам:

	Тема	Тип занятий
Часть I. Основные понятия теории групп и примеры		
1.	Симметрии в физике. Активные и пассивные преобразования. Групповые свойства преобразований симметрии и общее понятие группы и подгруппы. Абелевы группы. Гомоморфизм групп. Дискретные и непрерывные группы. Циклические группы, группа диэдра и симметрическая группа. Кватернионы.	
2.	Матричные группы $GL(n, K)$ и $SL(n, K)$. Группы вращений $O(n)$ и $SO(n)$. Группа симметрии евклидова пространства: повороты и трансляции. Группы унитарных преобразований $U(n)$ и $SU(n)$. Обобщение: матричные группы, связанные с билинейными и эрмитовыми формами. $SU(2)$ и алгебра матриц Паули. Параметризации группы вращений $SO(3)$.	
3.	Правые и левые смежные классы группы по подгруппе. Отношение сопряжения. Классы сопряженности. Центр. Инвариантные подгруппы (нормальные делители) и фактор-группы. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм групп. Ядро и образ гомоморфизма. Три основные теоремы об изоморфизме. Прямое и полупрямое произведения групп.	
4.	Конечные группы. Образующие и определяющие соотношения. Таблицы Кэли и теорема Кэли. Перестановки и их свойства. Диаграммы и таблицы Юнга. Группа кос.	

5.	Точечные группы. Кристаллы и пространственные группы: основные понятия и простейшие примеры (структура графена и нанотрубки). Введение в пакет программ GTPack для теоретико-группового анализа в системе Wolfram Mathematica.	
Часть II. Основы теории представлений групп		
6.	Действия группы на произвольном множестве. Точные, транзитивные, свободные и регулярные действия. Орбита и стабилизатор. Изоморфизм $SO(3)/SO(2)$ и двумерной сферы. $SU(2)$ как накрытие $SO(3)$.	
7.	Понятие представления группы. Тривиальное и определяющее представления. Эквивалентные, точные и унитарные представления. Теорема об унитарности представлений конечных и компактных групп.	
8.	Приводимые, вполне приводимые и неприводимые представления. Прямые суммы и тензорные произведения представлений. Леммы Шура. Одномерность неприводимых представлений абелевых групп. Ограничение представления и индуцированные представления. Теорема взаимности Фробениуса.	
9.	Собственные состояния оператора Гамильтона. Теорема Вигнера. Симметрия и вырождение собственных состояний. Разложение Клебша-Гордана и правила отбора. Теорема Вигнера-Эккарта.	
Часть III. Представления конечных и точечных групп		
10.	Групповая алгебра и регулярное представление. Теорема ортогональности для неприводимых представлений. Соотношение полноты для размерностей неприводимых представлений (теорема Бёрнсайда).	
11.	Характеры. Теорема ортогональности характеров. Критерий неприводимости. Компоненты представлений. Классы сопряженности и представления. Свойства таблицы характеров. Матрицы классов сопряженности и характеры Дирака. Метод Бёрнсайда для вычисления таблицы характеров. Метод Диксона (тема проекта).	
12.	Представления симметрической группы. Приводимость и проекторы. Таблицы и операторы Юнга. Характеры и правило Хука.	
13.	Точечные группы: классификация и их неприводимые представления.	
Часть IV. Применения теории групп		
14.	Задача о нормальных колебательных модах молекулярных систем. (Тема проекта: расчет для конкретной системы).	
15.	Представления группы $SU(2)$ и сферическая симметрия в квантовой механике. Вырождение энергетических состояний и правила отбора. Эффекты снятия вырождения. (Тема проекта: спин-орбитальное взаимодействие).	
16.	Обращение времени. Антиунитарность. Вещественность неприводимого представления. Цветные группы.	
17.	Теория Ландау фазовых переходов, параметр порядка и нарушение симметрии. Примеры: изинговский магнетик и переходы изотропная жидкость-нематический жидкий кристалл. Теория групп в	

6. Рекомендованная литература:

Помимо учебного пособия [1] и классической монографии [2], где коротко, ясно и доступно излагается значительная часть теоретического материала курса, к разряду рекомендованной литературы относится и более современная книга [3], ориентированная на физиков-теоретиков. Из англоязычной литературы, как дополнение к данному курсу, рекомендуются книги [4-6]. Проблема построения нормальных мод колебательной системы особенно подробно разобрана в монографии [7]. Теоретико-групповые методы с использованием системы Wolfram Mathematica обсуждаются в книгах [8, 9]. Статья [10], посвященная описанию возможностей пакета GTPack, дополняет материал книги [9].

- [1] Смирнов В. П. Групповые методы в теории атомов, молекул и кристаллов. — Санкт-Петербург, Россия: Спб НИУ ИТМО, 2013. — С. 67.
- [2] Петрашень М. И., Трифонов Е. Д. Применение теории групп в квантовой механике. — 4е изд. — Москва, Россия: Эдиториал УРСС, 2002. - С. 279.
- [3] Исаев А. П., Рубаков В. А. Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. — Москва, Россия: URSS, 2018. — С. 504.
- [4] Dresselhaus M. S., Dresselhaus G., Jorio A. Group Theory. Application to the Physics of Condensed Matter. - Berlin: Springer, 2008. - P. 582.
- [5] Ramond P. Group Theory. A Physicist's Survey. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2010.-P 310.
- [6] Zee A. Group Theory in a Nutshell for Physicists. — Woodstock, UK: Princetone University Press, 2016. -P. 613.
- [7] Wolfram T., Ellialtioglu S. Applications of Group Theory to Atoms, Molecules, and Solids. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2014. — P. 471.
- [8] El-Batanouny M., Wooten F. Symmetry and Condensed Matter Physics. — 4th edition. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2008. -P. 922.
- [9] Hergert W., Geilhufe R. M. Group Theory in Solid State Physics and Photonics. Problem Solving with Mathematica. - Weinheim, Germany : Wiley, 2018. - P. 364.
- [10] Geilhufe R. M., Hergert W. Gtpack: A Mathematica Group Theory Package for Application in Solid- State Physics and Photonics // Frontiers in Physics. — 2018. — Vol. 6. — P. 86.

7. Предварительно пройденные курсы, необходимые для изучения предмета:

Линейная алгебра, математический анализ, общая физика

8. Тип самостоятельных заданий:

В курсе запланированы домашние задания и выполнение проектов.

9. Как оценивается успеваемость по курсу:

Максимальное число баллов за курс – 100

Максимальное число баллов за решение задач – 30

Максимальное число баллов за проекты – 30

Максимальное число баллов за экзамен (зачет) – 40