Описания курса ФТФ Университета ИТМО /

Syllabus template Physics and Engineering Department ITMO University

**1.** Название: Математический анализ

**2.** Лектор: Екатерина Кучерук, Дмитрий Максимов; Ассистент: Инга Андреева

**3.** Краткая аннотация (500-700 символов, на простом и доступном языке):

Математический анализ является фундаментальным курсом в математической подготовке студентов физического направления. Ни одно современное направление исследований не обходится без технического аппарата математического анализа. В рамках курса студенты знакомятся с понятиями производной и интеграла Римана сначала для функций одной переменной, а потом - с аналогичными понятиями в общем случае. Курс заканчивается доказательством общей теоремы Стокса, которая, по общему мнению, и является окончанием математического анализа. Также в курсе предусмотрено изучение таких разделов, как “Ряды Фурье” и “Теория функций комплексного переменного”, формально не являющихся разделами математического анализа.

**5.** Название программы и семестр: «Техническая физика», 1-3 семестр

**6.** Детальное описание курса с разбиением по семинарам/практикам:

**Введение в математический анализ.**

• Множества и операции с ними.

• Высказывания и операции с ними.

• Предикаты. Область истинности.

• Кванторы.

• Отображения и их свойства.

• Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.

• Вещественные числа: аксиомы операций.

• Вещественные числа: аксиомы порядка

• Аксиома Архимеда и аксиома Дедекинда.

• Ограниченные множества. Супремум и инфимум.

• Теорема Кантора о вложенных отрезках.

• Классификация точек по отношению к множествам.

• Открытые множества. • Замкнутые множества.

• Замыкание. • Компактные множества.

• Связные множества.

• Мощность множества. Сравнение мощностей.

• Счетные множества.

• Мощность континуума.

• Булеан множества и его мощность.

**Предел последовательности. Ряды.**

• Определение предела последовательности. Простейшие свойства.

• Арифметические свойства предела. Бесконечно малая последовательность.

• Свойства предела, связанные с порядком. Теорема о двух милиционерах.

• Предел монотонной последовательности.

• Частичнй предел. Теорема Вейерштрасса.

• Замкнутость множества частичных пределов.

• Верхний и нижний предел.

• Фундаментальные последовательности. Теорема Коши.

• Число *e*.

• Расширенная прямая. Бесконечно большие последовательности. Арифметические свойства.

• Теорема Штольца.

• Определение ряда. Сходимость. Простейшие свойства.

• Абсолютная сходимость.

• Три признака сравнения.

• Признаки Коши и Даламбера.

• Признак Куммера. Признак Даламбера как следствие признака Куммера.

• Признак Раабе. Ряд Дирихле.

• Признак Бертрана. Признак Гаусса.

• Признаки Абеля и Дирихле.

**Предел функции. Непрерывность.**

• Два определения предела функции и их равносильность.

• Арифметические свойства предела.

• Свойства предела, связанные с неравенствами.

• Пределы слева и справа. Предел монотонной функции.

• Предел композиции.

• Предел $\lim\_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ и его следствия.

• Эквивалентность функций в точке. Замена на эквивалентные.

• Предел $\lim\_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ и его следствия.

• Символы Ландау.

• Непрерывность. Определение. Простейшие свойства.

• Две теоремы Вейерштрасса.

• Теорема Больцано-Коши.

• Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

• Непрерывность на топологическом языке.

• Образ компакта.

• Топологические доказательства теорем Вейерштрасса и Больцано Коши.

• Теорема о непрерывности обратной функции.

**Дифференциальное исчисление функций одной переменной.**

• Производная. Определение. Простейшие свойства.

• Производная произведения и частного.

• Производные элементарных функций.

• Производная композиции.

• Производная обратной функции. Следствия.

• Теорема Ферма.

• Теорема Ролля.

• Теорема Лагранжа.

• Теорема Коши.

• Связь монотонности и знака производной.

• Первое достаточное условие экстремума.

• Производные высших порядков. Бином Ньютона.

• Формула Лейбница (n-ая производная произведения).

• Формула Тейлора.

• Разложения элементарных функций по формуле Тейлора. Единственность.

• Степенные ряды. Сходимость степенных рядов для элементарных функций.

• Правило Лопиталя. Вычисление пределелов с помощью формулы Тейлора.

• Второе достаточное условие экстремума.

• Геометрический смысл производной. Касательная.

• Из выпуклости следует неотрицательность второй производной.

• Из неотрицательности второй производной следует выпуклость.

• Неравенство Йенсена.

• Следствия неравенства Йенсена: неравенство о средних и средних степенных.

• Следствия неравенства Йенсена: теорема о периметре правильного n-угольника и неравенство Коши-Буняковского.

**Интегральное исчисление функций одной переменной. Несобственные интегралы.**

• Неопределенный интеграл: определение, простейшие свойства, таблица.

• Интеграл Римана: определение, пример неинтегрируемой функции.

• Интеграл Римана: простейшие свойства.

• Аддитивность интеграла Римана.

• Первая теорема о среднем (две теоремы).

• Теорема Барроу.

• Формула Ньютона-Лейбница и ее следствия: интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле

• Суммы Дарбу и их свойства.

• Критерий интегрируемости.

• Интегрируемость непрерывных функций.

• Свойства интегрируемых функций (интегрруемость модуля, произведения, квадрата).

• Формула Валлиса.

• Формула трапеций.

• Формула Эйлера-Маклорена и ее следствия: асимптотика $\sum\_{}^{}n^{p}$и $\sum\_{}^{}\frac{1}{n}$.

• Формула Стирлинга.

• Две формулы Бонне (вторую выводим из первой).

• Вторая теорема о среднем значений: вывод из формул Бонне.

• Теорема о необходимом и достаточном условии существования предела функции (на +∞).

• Несобственные интегралы. Определение, необходимое и достаточное условие сходимости. Абсолютная сходимость.

• Простейшие свойства несобственных интегралов.

• Признаки сравнения.

• Предельный признак сравнения. Примеры.

• Интегральный признак сходимости рядов.

• Признаки Абеля и Дирихле.

• Интегралы от периодических функций.

• Формула Фруллани.

• Интеграл в смысле главного значения.

• Несобственные интегралы второго рода.

**Метрические пространства. Непрерывные отображения.**

• Определение метрических пространств и простейшие примеры.

• Предел последовательности.

• Полнота метрических пространств.

• Теорема Бэра.

• Топология в метрическом пространстве.

• Топологический компакт. Свойства.

• Секвенциальный компакт. Свойства.

• Равносильность топологической и секвенциальной компактности.

• Компактность в $R^{n}$.

• Непрерывные отображения.

• Непрерывный образ компакта. Две теоремы Вейерштрасса.

• Связные множества. Теорема Больцано-Коши.

• Равномерно непрерывные отображения. Теорема Кантора.

• Банаховы пространства. Определения. Примеры.

• Линейные операторы. Непрерывность.

• Изоморфизм конечномерных банаховых пространств.

• Сепарабельные банаховы пространства. Теорема Вейерштрасса.

• Теорема Арцела-Асколи.

**Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**.

• Дифференциал отображения. Определение. Простейшие свойства.

• Дифференциал композиции.

• Свойства дифференциала.

• Дифференциал обратного отображения.

• Частные производные.

• Теорема о конечном приращении.

• Наличие и непрерывность частных производных влечет дифференцируемость.

**7.** Рекомендованная литература:

* Математический анализ: учебник для студентов математических и физико-математических факультетов и специальностей высших учебных заведений / В. А. Зорич. - 6-е изд., доп. - Москва : Изд-во МЦНМО, 2012
* Элементы теории функций и функционального анализа: / А. Колмогоров, С. Фомин. - М. : МИР, Б. г. (1988). - 712 с. староараб. паг. : ил.; 21 см.;
* Основы математического анализа / Уолтер Рудин; Пер. с англ. В. П. Хавина. - СПб. : Лань, 2002. - 319 с.; 21 см.; ISBN 5-8114-0443-3
* Математический анализ на многообразиях: учеб. пособие / М. Спивак ; [пер. с англ. И. А. Березанского]. - Изд. второе. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2005. - 158, [1] с. : ил.; 21 см

**8.** - В курсе запланирован цикл домашних заданий для иллюстрации и лучшего понимания

основного материала курса (около 30-40 задача различной сложности)

- В рамках семинарских занятий студенты самостоятельно решают задачи в аудитории

**9.** Как оценивается успеваемость по курсу:

В каждом семестре проводится устный экзамен.

Максимальное количество баллов за курс 100

Максимальное количество баллов за решение задач 40

Максимальное количество баллов за финальный устный экзамен 60