

Уравнения и методы математической физики / Equations and Methods of Mathematical Physics

1. Название: Уравнения и методы математической физики / Equations and Methods of Mathematical Physics

2. Лектор: Игорь Попов
Lecturer: Igor Popov

5. Название программы и семестр: бакалавриат «Техническая физика», 4-5 семестры
Study program and semester: bachelor program “Technical Physics”, 4-5 semesters

6. Программа курса:

	Тема	Тип занятий
Глава 1. Одномерное волновое уравнение		
1	Одномерное волновое уравнение. Метод Даламбера	Лекция
2	Метод продолжения. Метод продолжений для полуограниченной струны. Жесткое закрепление струны. Свободное закрепление струны. Конечная струна.	Лекция
3	Метод Фурье для конечной струны	Лекция
4	Метод Фурье для свободного закрепления струны. Вынужденные колебания струны.	Семинар
Глава 2. Одномерное уравнение теплопроводности		
5	Одномерное уравнение теплопроводности. Метод Фурье для конечного стержня.	Лекция
6	Метод Фурье для конечного теплоизолированного стержня. Неоднородное уравнение теплопроводности.	Лекция
7	Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня.	Лекция
8	Задачи об установившихся процессах. Законы Фурье.	Семинар
9	Метод подобия в теории теплопроводности. Задача о возрасте Земли.	Семинар
Глава 3. Уравнение Лапласа		
10	Уравнение Лапласа. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.	Лекция
11	Задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.	Семинар
Глава 4. Теоремы единственности		
12	Теорема единственности для уравнения струны. Теорема единственности для уравнения теплопроводности.	Лекция
13	Формулы Грина в трехмерном случае. Следствия из формул Грина.	Лекция

14	Теорема единственности для уравнения Лапласа. Вторая формула Грина в пространстве \mathbb{R}^n .	Лекция
Глава 5. Классификация линейных уравнений в частных производных		
15	Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве \mathbb{R}^n .	Лекция
16	Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве \mathbb{R}^2 .	Семинар
Глава 6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора.		
17	Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля.	Лекция
Глава 7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа		
18	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Инвариантность функции Грина относительно перестановки аргументов.	Лекция
19	Метод изображений. Функции Грина для различных двугранных углов. Функция для слоя между двумя параллельными плоскостями.	Семинар
20	Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.	Лекция
21	Метод инверсий. Функция Грина задачи Дирихле для двух касающихся шаров.	Семинар
Глава 8. Уравнение Гельмгольца		
22	Уравнение Гельмгольца. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца.	Лекция
23	Формулы Грина для оператора Гельмгольца в пространстве \mathbb{R}^3 . Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.	Лекция

Detailed content and structure with sectioning of lectures/seminars:

	Тема	Тип занятий
Chapter 1. One-dimensional wave equation		
1	One-dimensional wave equation. D’Alambert method	Lecture
2	Continuation method. The continuation method for a semi-bounded string. Hard string fastening. Free string anchorage. Finite string.	Lecture
3	Fourier method for finite string.	Lecture
4	Fourier method for free string fixing. Forced vibrations of the string.	Seminar
Chapter 2. One-dimensional heat conduction equation		
5	One-dimensional heat equation. Fourier method for a finite rod.	Lecture
6	Fourier method for the finite heat-insulated rod. Inhomogeneous heat equation.	Lecture
7	Heat equation with non-uniform boundary conditions. The heat equation for an infinite rod.	Lecture
8	Tasks about established processes. Fourier laws.	Seminar

9	The method of similarity in the theory of heat conduction. The task of the age of the Earth.	Seminar
Chapter 3. Laplace equation		
10	Laplace equation. The Dirichlet problem for the Laplace equation in a circle.	Lecture
11	The Dirichlet problem for the Laplace equation in a ring. The Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangle.	Seminar
Chapter 4. Uniqueness Theorems		
12	Uniqueness theorem for string equation. The uniqueness theorem for the heat equation.	Lecture
13	Green formulas in the three-dimensional case. Corollaries from Green's formulas.	Lecture
14	The uniqueness theorem for the Laplace equation. Green's second formula in \mathbb{R}^n space.	Lecture
Chapter 5. Classification of linear partial differential equations		
15	Classification of linear partial differential equations in \mathbb{R}^n space.	Lecture
16	Classification of linear partial differential equations in \mathbb{R}^2 space.	Seminar
Chapter 6. The Green function of an ordinary differential operator		
17	Green function of an ordinary differential operator. Green function of the Sturm-Liouville problem.	Lecture
Chapter 7. The Green function of the Dirichlet problem for the Laplace equation		
18	The Green function of the Dirichlet problem for the Laplace equation. Invariance of the Green function with respect to the permutation of arguments.	Lecture
19	Image method. Green functions for different dihedral angles. The function for a layer between two parallel planes.	Seminar
20	The Green function of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a circle. The Green function of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a ball.	Lecture
21	Inversion method. The Green function of the Dirichlet problem for two touching balls.	Seminar
Chapter 8. Helmholtz Equation		
22	Helmholtz equation. Dirichlet problem for the Helmholtz equation.	Lecture
23	Green's formulas for the Helmholtz operator in \mathbb{R}^3 space. The Green function of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation.	Lecture

7. Рекомендованная литература:

1. Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2018 – 39 с. http://books.ifmo.ru/book/2189/tipovoy_raschet_po_matematicheskoy_fizike:_uchebno-metodicheskoe_posobie / recenzenty: miroshnichenko g. p., uzdin v. m.htm
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2004. – 400 с.

3. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа. Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 400 с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. – 798 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. - 848 с.
6. Блинова И.В., Попов И.Ю., Трифанова Е.С. Типовые расчеты по функциональному анализу. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2011 – 24 с.
https://books.ifmo.ru/book/647/tipovye_raschety_po_funkcionalnomu_analizu.htm
7. Попов И.Ю. Математическая физика. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2005 – 105 с.
8. Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2009 – 59 с.
https://books.ifmo.ru/book/488/prosteyschie_uravneniya_matematicheskoy_fiziki_uchebnoe_posobie.htm
9. Колоколов И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики. Изд. 4-е. – Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009 – 288 с.

Textbooks:

1. Lobanov I.S., Popov A.I., Popov I.Yu., Trifanov A.I. Problems for individual work in mathematical physics. ITMO University, St. Petersburg, 2018 - 39 p.
http://books.ifmo.ru/book/2189/tipovoy_raschet_po_matematicheskoy_fizike_uchebno-metodicheskoe_posobie_recenzenty_miroshnichenko_g.p.,_uzdin_v.m..htm
2. Vladimirov V.S., Zharinov V.V. Equations of mathematical physics. Moscow: Fizmatlit, 2004. - 400 p.
3. Vlasova E.A., Marchevsky I.K. Elements of functional analysis. St. Petersburg: Lan, 2015. - 400 p.
4. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. Equations of mathematical physics. Moscow: Science, 2004. - 798 p.
5. Smirnov V.I. The course of higher mathematics. Volume II / Prev L. D. Faddeeva, before. and approx. E. A. Grinina: 24th ed. - SPb. : BHV-Petersburg, 2008. - 848 p.
6. Blinova I.V., Popov I.Yu., Trifanova E.S. Problems for individual work in functional analysis. ITMO University, St. Petersburg, 2011 - 24 p.
https://books.ifmo.ru/book/647/tipovye_raschety_po_funkcionalnomu_analizu.htm
7. Popov I.Yu. Mathematical physics. ITMO University, St. Petersburg, 2005 - 105 p.
8. Blinova I.V., Popov I.Yu. The simplest equations of mathematical physics. ITMO University, St. Petersburg, 2009 - 59 p.
https://books.ifmo.ru/book/488/prosteyschie_uravneniya_matematicheskoy_fiziki_uchebnoe_posobie.htm
9. Kolokolov I.V., Kuznetsov E.A., Milshtein A.I., Podivilov E.V., Chernykh A.I., Shapiro D.A., Shapiro E.G. Problems in mathematical methods of physics. Ed. 4th - Moscow: LIBROCOM Book House, 2009 - 288 p.

8. Предварительно пройденные курсы, необходимые для изучения предмета: Математический анализ, алгебра и геометрия, дифференциальные уравнения.

Course prerequisites:

Mathematical analysis, algebra and geometry, differential equations.

9. Тип самостоятельных заданий:

Задача 1.

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u'_x(4, t) = 0 \\ u(x, 0) = -x \\ u'_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Задача 2.

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x - x^2 \end{cases}$$

Задача 3.

Решить граничную задачу для оператора Лапласа в заданной области:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \leq 1 \\ u|_{r=1} = \cos \varphi \end{cases}$$

Задача 4.

Привести уравнение к каноническому виду в каждой из областей, где его тип сохраняется:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Задача 5.

Построить функцию Грина (если она существует) данного дифференциального оператора:

$$Ly = y''', \quad y(0) = y'(0) = y'(1) + y(1) = y''(1) = 0.$$

Задача 6.

Построить функцию Грина для дифференциального оператора второго порядка:

$$Ly = y'' + y, \quad y'(0) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Задача 7.

Написать формулу Грина и найти формально сопряженное дифференциальное выражение:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}.$$

Задача 8.

Используя метод изображений, найти функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в указанной области:

$$\square^3, \text{ внутренность двугранного угла величиной } \frac{\pi}{3}.$$

Assignments:

Task 1.

Solve the initial-boundary value problem for the string equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u'_x(4, t) = 0 \\ u(x, 0) = -x \\ u'_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Task 2.

Solve the initial-boundary value problem for the heat equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x - x^2 \end{cases}$$

Task 3.

Solve the boundary problem for the Laplace operator in a given domain:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \leq 1 \\ u|_{r=1} = \cos \varphi \end{cases}$$

Task 4.

To bring the equation to the canonical form in each of the areas where its type is preserved:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0$$

Task 5.

Construct the Green function (if it exists) of the given differential operator:

$$Ly = y''', \quad y(0) = y'(0) = y'(1) + y(1) = y''(1) = 0.$$

Task 6.

Build the Green function for a second order differential operator:

$$Ly = y'' + y, \quad y'(0) = y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Task 7.

Write Green's formula and find a formally adjoint differential expression:

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + \frac{x_1}{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2}.$$

Task 8.

Using the image method, find the Green function of the Dirichlet problem for the Laplace equation in the specified region:

$$\square^3, \text{ dihedral angle interior of } \frac{\pi}{3}.$$

10. Как оценивается успеваемость по курсу:

Максимальное количество баллов за курс	100
Индивидуальное задание	40
Выполнение контрольных работ	20
Работа на практических занятиях	20
Экзамен	20

Grading policy:

Highest final grade for the course	100
Individual task	40
Tests	20
Work on practical classes	20
Exam	20