Математический анализ

2. Лектор: Екатерина Кучерук, Дмитрий Максимов;
Ассистент: Инга Андреева

3. Краткая аннотация (500-700 символов, на простом и доступном языке):
Математический анализ является фундаментальным курсом в математической подготовке студентов физического направления. Ни одно современное направление исследований не обходится без технического аппарата математического анализа. В рамках курса студенты знакомятся с понятиями производной и интеграла Римана сначала для функций одной переменной, а потом - с аналогичными понятиями в общем случае. Курс заканчивается доказательством общей теоремы Стокса, которая, по общему мнению, и является окончанием математического анализа. Также в курсе предусмотрено изучение таких разделов, как “Ряды Фурье” и “Теория функций комплексного переменного”, формально не являющихся разделами математического анализа.

5. Название программы и семестр: «Техническая физика», 1-3 семестр

6. Детальное описание курса с разбиением по семинарам/практикам:

I семестр
Введение в математический анализ.
• Множества и операции с ними.
• Высказывания и операции с ними.
• Предикаты. Область истинности.
• Кванторы.
• Отображения и их свойства.
• Бинарные отношения. Отношения эквивалентности.
• Вещественные числа: аксиомы операций.
• Вещественные числа: аксиомы порядка
• Аксиома Архимеда и аксиома Дедекинда.
• Ограниченные множества. Супремум и инфимум.
• Теорема Кантора о вложенных отрезках.
• Классификация точек по отношению к множествам.
• Открытые множества. • Замкнутые множества.
• Замыкание. • Компактные множества.
• Связные множества.
• Мощность множества. Сравнение мощностей.
• Счетные множества.
• Мощность континуума.
• Булеан множества и его мощность.

Предел последовательности. Ряды.
• Определение предела последовательности. Простейшие свойства.
• Арифметические свойства предела. Бесконечно малая последовательность.
• Свойства предела, связанные с порядком. Теорема о двух милиционерах.
• Предел монотонной последовательности.
• Частичнй предел. Теорема Вейерштрасса.
• Замкнутость множества частичных пределов.
• Верхний и нижний предел.
• Фундаментальные последовательности. Теорема Коши.
• Число e.
• Расширенная прямая. Бесконечно большие последовательности. Арифметические свойства.

• Теорема Штольца.
• Определение ряда. Сходимость. Простейшие свойства.
• Абсолютная сходимость.
• Три признака сравнения.
• Признаки Коши и Даламбера.
• Признак Куммера. Признак Даламбера как следствие признака Куммера.
• Признак Раабе. Ряд Дирихле.
• Признак Бертрана. Признак Гаусса.
• Признаки Абеля и Дирихле.

Предел функции. Непрерывность.
• Два определения предела функции и их равносильность.
• Арифметические свойства предела.
• Свойства предела, связанные с неравенствами.
• Пределы слева и справа. Предел монотонной функции.
• Предел композиции.
• Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ и его следствия.
• Эквивалентность функций в точке. Замена на эквивалентные.
• Предел $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ и его следствия.
• Символы Ландау.
• Непрерывность. Определение. Простейшие свойства.
• Две теоремы Вейерштрасса.
• Теорема Больцано-Коши.
• Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
• Непрерывность на топологическом языке.
• Образ компакта.
• Топологические доказательства теорем Вейерштрасса и Больцано Коши.
• Теорема о непрерывности обратной функции.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной.
• Производная. Определение. Простейшие свойства.
• Производная произведения и частного.
• Производные элементарных функций.
• Производная композиции.
• Производная обратной функции. Следствия.
• Теорема Ферма.
• Теорема Ролля.
• Теорема Лагранжа.
• Теорема Коши.
• Связь монотонности и знака производной.
• Первое достаточное условие экстремума.
• Производные высших порядков. Бином Ньютона.
• Формула Лейбница (n-ая производная произведения).
• Формула Тейлора.
• Разложения элементарных функций по формуле Тейлора. Единственность.
• Степенные ряды. Сходимость степенных рядов для элементарных функций.
• Правило Лопиталя. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора.
• Второе достаточное условие экстремума.
• Геометрический смысл производной. Касательная.
• Из выпуклости следует неотрицательность второй производной.
• Из неотрицательности второй производной следует выпуклость.
• Неравенство Йенсена.

• Следствия неравенства Йенсена: неравенство о средних и средних степенных.
• Следствия неравенства Йенсена: теорема о периметре правильного n-угольника и неравенство Коши-Буняковского.

II семестр
Интегральное исчисление функций одной переменной. Несобственные интегралы.
• Неопределенный интеграл: определение, простейшие свойства, таблица.
• Интеграл Римана: определение, пример неинтегрируемой функции.
• Интеграл Римана: простейшие свойства.
• Аддитивность интеграла Римана.
• Первая теорема о среднем (две теоремы).
• Теорема Барроу.
• Формула Ньютона-Лейбница и ее следствия: интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле
• Суммы Дарбу и их свойства.
• Критерий интегрируемости.
• Интегрируемость непрерывных функций.
• Свойства интегрируемых функций (интегрруемость модуля, произведения, квадрата).
• Формула Валлиса.
• Формула трапеций.
• Формула Эйлера-Маклорена и ее следствия: асимптотика $\sum n^p$и $\sum \frac{1}{n}$.
• Формула Стирлинга.
• Две формулы Бонне (вторую выводим из первой).
• Вторая теорема о среднем значений: вывод из формул Бонне.
• Теорема о необходимом и достаточном условии существования предела функции (на $+\infty$).
• Несобственные интегралы. Определение, необходимое и достаточное условие сходимости. Абсолютная сходимость.
• Простейшие свойства несобственных интегралов.
• Признаки сравнения.
• Предельный признак сравнения. Примеры.
• Интегральный признак сходимости рядов.
• Признаки Абеля и Дирихле.
• Интегралы от периодических функций.
• Формула Фруллани.
• Интеграл в смысле главного значения.
• Несобственные интегралы второго рода.

Метрические пространства. Непрерывные отображения.
• Определение метрических пространств и простейшие примеры.
• Предел последовательности.
• Полнота метрических пространств.
• Теорема Бэра.
• Топология в метрическом пространстве.
• Топологический компакт. Свойства.
• Секвенциальный компакт. Свойства.
• Равносильность топологической и секвенциальной компактности.
• Компактность в R^n.
• Непрерывные отображения.
• Непрерывный образ компакта. Две теоремы Вейерштрасса.
• Связные множества. Теорема Больцано-Коши.
• Равномерно непрерывные отображения. Теорема Кантора.
• Банаховы пространства. Определения. Примеры.
• Линейные операторы. Непрерывность.

• Изоморфизм конечномерных банаховых пространств.
• Сепарабельные банаховы пространства. Теорема Вейерштрасса.
• Теорема Арцела-Асколи.

III семестр
Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.
• Дифференциал отображения. Определение. Простейшие свойства.
• Дифференциал композиции.
• Свойства дифференциала.
• Дифференциал обратного отображения.
• Частные производные.
• Теорема о конечном приращении.
• Наличие и непрерывность частных производных влечет дифференцируемость.
Смешанные производные.
Билинейные формы.
Дифференциалы высших порядков.
Симметричность формы Dn.
Формула Тейлора.
Достаточное условие локального экстремума.
Теорема о неявной функции.
Теорема об обратном отображении.
Метод множителей Лагранжа.

Интегральное исчисление функций нескольких переменных.
Теорема Стоуна-Вейерштрасса.
Определение интеграла. Простейшие свойства.
Независимость интеграла от порядка интегрирований.
Второе доказательство теоремы о равенстве смешанных производных.
Интеграл по симплексу.
Теорема о замене переменной в многомерном интеграле.

Дифференциальные формы и теорема Стокса.
Определение дифференциальной формы и поверхности. Интеграл формы по поверхности. Простейшие свойства форм.
Дифференцирование форм. Определение и свойства, Дифференцирование
внешнего произведение форм. Второй диференциал формы.
Инвариантность формы относительно подстановки.
Композиция отображений.
Связь интегрирования и композиции.
Симплексы и цепи. Интегрирование по цепи. Граница симплекса.
Теорема Стокса
Следствия теоремы Стокса: формула Грина, формула Гаусса-Остроградского и формула Стокса.

7. Рекомендованная литература:

- Математический анализ: учебник для студентов математических и физико-математических факультетов и специальностей высших учебных заведений / В. А. Зорич. - 6-е изд., доп. - Москва : Изд-во МЦНМО, 2012
- Элементы теории функций и функционального анализа: / А. Колмогоров, С. Фомин. - М. : МИР, Б. г. (1988). - 712 с. староараб. паг. : ил.; 21 см.;
- Основы математического анализа / Уолтер Рудин; Пер. с англ. В. П. Хавина. - СПб. : Лань, 2002. - 319 с.; 21 см.; ISBN 5-8114-0443-3
- Математический анализ на многообразиях: учеб. пособие / М. Спивак ; [пер. с англ. И. А. Березанского]. - Изд. второе. - Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2005. - 158, [1] с. : ил.; 21 см

8. - В курсе запланирован цикл домашних заданий для иллюстрации и лучшего понимания основного материала курса (около 30-40 задача различной сложности)
- В рамках семинарских занятий студенты самостоятельно решают задачи в аудитории

9. Как оценивается успеваемость по курсу:
В каждом семестре проводится коллковиум, устный экзамен и учитываются баллы, полученные на практических занятиях.
Чтобы получить допуск к устному экзамену, нужно решить обе контрольных (в течение кажого семестра проходит две контрольных) полностью и не менее 75% довашних заданий.
Максимальное число баллов за курс – 100.
Максимальное число баллов за коллковиум – 30
Максимальное число баллов за практические заанятия – 30
Максимальное число баллов за экзамен – 40
Но, если бы хотя бы одной из этих трех составляющих не выполнен минимальный результат (2 за устный ответ на коллковиуме или экзамене, нет получен допуск на практике), то итоговая оценка не ставится (объявлется равной 2).