

## Примеры заданий для самостоятельного решения

1. Решить уравнение

$$2x \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0.$$

2. Тяжёлая однородная цепь переброшена через гладкий гвоздь так, что с одной стороны свисает часть её длиной 8 м, а с другой стороны — часть длиной 10 м. За какое время  $T$  цепь соскользнёт с гвоздя?

3. Решить задачу Коши

$$y'' + (2 + 4y^2)y'^3 - 2yy'^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}.$$

4. Найти все вещественные решения уравнения

$$y^{(4)} - y = 2e^x + 5e^x \sin x.$$

5. Решить систему уравнений

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Доказать, что в случае  $q(x) \leq 0$  все решения уравнения

$$y'' + q(x)y = 0$$

с положительными начальными условиями  $y(x_0) > 0$ ,  $y'(x_0) > 0$  остаются положительными при всех  $x > x_0$ .

7. Решить уравнение

$$xy'' - (1 + x)y' + 2(1 - x)y = 9x^2 e^{2x}$$

при  $x > 0$ .

8. Найти общее решение и выделить особые решения уравнения

$$xy' + (y')^2 - y = 0.$$

Сделать эскиз интегральных кривых.

9. Найти положения равновесия системы, определить их характер и сделать эскиз фазовых траекторий:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2. \end{cases}$$

10. Найти все решения уравнения

$$(y^2 + 1)z \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 - 1)z \frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - 1)y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

а также найти решение, удовлетворяющее начальному условию:  $u = z^2$  при  $y = x$  ( $x > 1$ ,  $z > 0$ ).