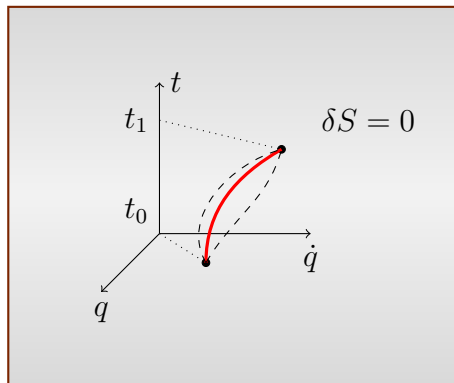


# Теоретическая механика

2019 г.



Название курса Теоретическая (аналитическая) механика

Преподаватели

Лектор: Кривосенко Юрий Сергеевич

Ассистент: Буренёв Иван Николаевич

Краткая аннотация

Данный курс является введением в теоретическую механику как раздел теоретической физики. Содержание включает в себя лагранжеву и гамильтонову механики, в том числе описание систем со связями, симметрии и законы сохранения в механике, основы теории колебаний, понятия интегральных инвариантов и канонических преобразований. Рассматриваемые темы представляют собой необходимую основу для последующего изучения как классического электромагнетизма, так и квантовой механики.

Название программы и семестр Бакалавриат физико-технического факультета (нанофотоника и квантовая оптика/техническая физика/прикладная и теоретическая физика)

Детальное описание курса

Ниже приведён объединённый список вопросов к коллоквиуму и экзамену.

1. Классификация связей. Свободные и несвободные системы.
2. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи.
3. Общее уравнение динамики. Система уравнений Лагранжа первого рода.
4. Обобщённые координаты и силы. Уравнения Лагранжа второго рода.
5. Свойства уравнений Лагранжа второго рода (кинетическая энергия, разрешимость относительно обобщённых ускорений).
6. Изменение полной механической энергии. Частные случаи склерономной и консервативной систем. Гироскопические и диссипативные силы.
7. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Ковариантность и калибровочная инвариантность. Натуральная система.
8. Механическое подобие. Теорема вириала.
9. Интегрирование уравнений одномерного движения. Приведённая масса в задаче двух тел.
10. Восстановление вида потенциала по зависимости периода колебаний в потенциальной яме от полной энергии.
11. Движение в центральном поле. Уравнения на  $t(r)$  и  $\varphi(r)$ . Замкнутость орбиты, падение на центр.
12. Кеплерова задача. Уравнения траекторий.
13. Подстановка Бине. Вывод уравнения траектории в задаче Кеплера.
14. Сечение рассеяния. Формула Резерфорда.
15. Действие по Гамильтону. Принцип Гамильтона-Остроградского.
16. Движение по инерции, геодезические. Принцип Мопертюи.
17. Понятие первого интеграла лагранжевой системы. Связь свойств симметрии и законов сохранения.
18. Замена координат в уравнениях Эйлера-Лагранжа. Теорема Нётер.

19. Включение связей в уравнения Эйлера-Лагранжа.
20. Малые одномерные колебания в окрестности устойчивого положения равновесия (гармонический осциллятор, семейство фазовых траекторий, вынужденные колебания, резонанс, случай произвольной вынуждающей силы, передаваемая осциллятору энергия).
21. Параметрические колебания, резонанс, уравнение Матьё.
22. Колебания систем с числом степеней свободы, большим единицы. Нормальные моды. Контравариантность сил. Понятие антирезонанса.
23. Затухающие колебания (одномерные и в случае большего числа степеней свободы). Диссипативная функция Рэлея.
24. Ангармонические колебания, метод последовательных приближений, комбинационные частоты. Математический маятник, фазовый портрет, сепаратриса.
25. Теорема Донкина, преобразование Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона. Гамильтониан натуральной системы.
26. Циклические координаты и понижение порядка гамильтоновой системы.
27. Скобки Пуассона, их основные свойства. Тождество Якоби (Пуассона). Теорема Пуассона-Якоби.
28. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Гамильтоновость системы как следствие его наличия.
29. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.
30. Сохранение фазового объёма. Теорема Лиувилля.
31. Канонические преобразования. Определение, критерий №1 (скобки Лагранжа).
32. Канонические преобразования. Определение, критерий №2 (скобки Пуассона).
33. Существование производящей функции и валентности как критерий каноничности преобразования (№3).
34. Теорема о переводе каноническим преобразованием любой гамильтоновой системы в гамильтонову.
35. Группа канонических преобразований, подгруппа унивалентных.

36. Свободное каноническое преобразование, его производящая функция. Другие независимые переменные и типы производящих функций.
37. Движение гамильтоновой системы как каноническое преобразование.
38. Уравнение Гамильтона-Якоби, примеры. Укороченное действие.
39. Пример разделения переменных в уравнении Гамильтона-Якоби.
40. Оптико-механическая аналогия. Уравнения Гамильтона-Якоби и эйконала.

### Рекомендованная литература

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике (2005).
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.1. Механика (1988).
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика (1999).
4. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики (2001).
5. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков (1978).

Предварительно пройденные курсы    Линейная алгебра, математический анализ, общая физика (механика).

Типовое домашнее задание    Тема “Интегральные инварианты”.

- 1) Динамическая система задаётся системой уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1a)$$

или, в краткой записи,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1b)$$

Докажите, что фазовый объём этой системы сохраняется тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = (\nabla, \mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1c)$$

- 2) Определите достаточное (и нетривиальное!) условие того, что выражение

$$I = \oint \sum_i \left[ (\alpha_i p_i + \varphi_i(q_i)) \delta q_i + (\beta_i q_i + \xi_i(p_i)) \delta p_i \right] \quad (2)$$

является интегральным инвариантом.

- 3) Вычислите значение интеграла

$$I = \oint_C \left[ \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t \right], \quad (3)$$

взятого вдоль замкнутого контура  $C$ , лежащего на трубке прямых путей, но не охватывающего её.

### Критерии оценивания

- Итоговая оценка за курс ставится по совокупности оценок за коллоквиум и экзамен, которые сдаются устно. Шкала оценивания пятибалльная.
- Допуск на экзамен даётся при условии получения зачёта по практическим занятиям.
- Для получения зачёта по практике студенту необходимо набрать не менее 2/3 баллов за решённые задачи (в совокупности за домашние задания и самостоятельные работы), а также сдать все контрольные.