Линейная алгебра

Лекторы:
Александра Мадунц

Язык:
Русский

Трудоемкость:
9 з.е.

Форма контроля:
Экзамен

Образовательная программа:
Беспроводные технологии
1,2 семестры

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
32	64	
***1 академический час = 45 минутам**		

Линейная алгебра является одним из базовых курсов, лежащих в основании математического образования физика. Линейные зависимости — самые простые из всех функциональных зависимостей, встречающихся в природе, и поэтому наиболее глубоко изученные. Идеи линейной алгебры лежат в основе таких разделов науки, как квантовая механика, математическая физика, экстремальные задачи, машинное обучение, эконометрика и многие другие. В рамках курса слушатели изучат свойства систем линейных уравнений, познакомятся с основами матричного и тензорного исчисления, теорией операторов в конечномерном пространстве, аналитической геометрией на плоскости и в пространстве, а также получат представление о функциональном анализе.

Содержание курса

Линейная алгебра

1 семестр

Структура курса

Основные алгебраические понятия

1. Бинарная операция. Группы и абелевы группы.
2. Понятие поля. Числовые поля.
3. Бинарные отношения, примеры. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности.

Поле комплексных чисел

1. Построение поля комплексных чисел. Простейшие свойства комплексных чисел.
2. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.
3. Корня из комплексного числа. Группа корней из единицы. Первообразные корни из единицы.
4. Комплексная экспонента. Показательная форма записи комплексного числа. Формулы Эйлера.
5. Формулы Эйлера. Связь тригонометрических и гиперболических функций.

Аналитическая геометрия

1. Линейные операции с векторами.
2. Скалярное произведение векторов и его свойства.
3. Векторное произведение векторов и его свойства.
4. Смешанное произведение векторов и его свойства.
5. Различные виды уравнения прямой на плоскости.
6. Различные виды уравнения плоскости.
7. Различные виды уравнения прямой в пространстве.
8. Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола.
9. Поверхности второго порядка: эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конусы и цилиндры.

Матрицы, определители, системы линейных уравнений

1. Линейные операции над матрицами.
2. Умножение матриц и его свойства.
3. Элементарные преобразования систем линейных уравнений.
4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
5. Группа перестановок.
6. Понятие определителя. Простейшие определители (порядка 1, 2, 3 и треугольных матриц).
7. Свойства определителя.
8. Обратная матрица.
9. Теорема Крамера о решении системы линейных уравнений.
10. Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли о решении системы линейных уравнений.

Линейные пространства

1. Понятие линейного пространства. Линейная независимость.
2. Подпространства.
3. Базис.
4. Координаты в конечномерном линейном пространстве.
5. Матрица перехода от базиса к базису.
6. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма.
7. Линейные отображения. Их ядро, образ, матрица.
8. Линейные операторы. Их обратимость.
9. Канонический базис. Собственные числа и собственные векторы.
10. Понятие жордановой формы.

2 семестр

Структура курса

Евклидовы и унитарные пространства

1. Евклидовы и унитарные пространства, основные понятия . Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника.
2. Ортогонализация. Ортогональный базис. Ортогональное дополнение.
3. Матрица Грама.
4. Ортогональные и унитарные матрицы.
5. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор.
6. Критерий существования ортонормированного базиса из собственных векторов в евклидовом пространстве.

7. Ортогональные и унитарные операторы.
8. Нормальный линейный оператор. Критерий существования ортонормированного базиса из собственных векторов в унитарном пространстве.
9. Положительно определенный оператор.

Билинейные и квадратичные формы

1. Билинейные формы. Квадратичные формы.
2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преображением.
4. Классификация квадратичных форм с помощью индексов инерции.
5. Критерий Сильвестра.

Тензорная алгебра

1. Задачи, приводящие к тензорной записи.
2. Теорема о взаимной базисе евклидова пространства. Матрицы перехода. Контравариантные и ковариантные законы изменения координат.
3. Самосопряженное пространство. Взаимный базис линейного пространства. Изменение координат ковектора при перемене базиса.
4. Канонический изоморфизм L и L**, E и E**.
5. Тензорное пространство. Виды тензорных пространств валентности 2.
6. Задание тензоров через координаты. Изменение координат для тензоров валентности 1 и 2 как формулы, связанные с изменением матриц алгебраических объектов.
7. Операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтенирование.

Теория групп

1. Подгруппы. Нормальные подгруппы.
2. Гомоморфизмы.
3. Циклические группы.
4. Перестановки и движения. Группа диэдра. Теорема Кэли.
5. Фактор-группа.
6. Теоремы о гомоморфизме.
7. Внешнее и внутреннее прямое произведение групп.
8. Операторные множества. Лемма Бернсайда.

Рекомендуемые ресурсы

Основная литература:

1. Халмош П., Конечномерные векторные пространства, пер. с англ. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. - 264 с.
2. Фаддеев Д.К., Лекции по алгебре, - М.: Наука, 1984. - 416 с.
3. Булдырев В.С., Павлов Б.С., Линейная алгебра и функции многих переменных, Л.: Издательство Ленинградского университета, 1985. - 496 с.

Дополнительная литература:

1. Беллман Р.Э., Введение в теорию матриц, М.: Наука, 1969. - 368 с.
2. Гельфанд И.М., Лекции по линейной алгебре, М.: Добросвет, МЦНМО, 1998. - 320 с.
3. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, 5-е изд. - М.: Физматлит, 2004.- 560с.
4. Шафаревич И.Р., Основные понятия алгебры, Ижевск: Редакция журнала "Регулярная и хаотическая динамика"Ижевская республиканская типография, 1999. - 348 стр. ISBN 5-80806-022-7.
5. Библиотечка Квант. Выпуск 061. Балк М.Б., Болтянский В.Г. Геометрия масс, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. - 160 с. - (Библиотечка Квант. Выпуск 61).
6. Филиппов А.Ф., Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М.: Интеграл-Пресс, 1998. - 208 с. - ISBN 5-89602-010-4.

Задачники:

1. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977
2. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969

Политика оценивания

Балловая система:

1. Общая оценка: меньше 60 неудовлетворительно, 60-74 удовлетворительно, 75-89 хорошо, 90-100 отлично.

2. Практические занятия: 3 контрольные, каждая максимум по 10 баллов, минимум по 6 баллов, 3 индивидуальных домашних задания, каждое максимум по 5 баллов, минимум по 3 балла, в итоге максимум 45 баллов, необходимый минимум 27 баллов.

3. Коллоквиум максимум 20 баллов, необходимый минимум 12 баллов(12-14 три, 15-17 четыре и 18-20 пять).

4. Экзамен максимум 35 баллов, необходимый минимум 21 балл(21-25 три, 26-30 четыре, 31-35 пять).