Математический анализ

Лекторы:
Екатерина Кучерук
Дмитрий Максимов

Ассистент:
Инга Андреева
Арина Табиева
Дмитрий Зезюлин

Язык:
Русский

Трудоемкость:
14 з.е.

Образовательная программа:
Теоретическая и экспериментальная физика
1,2,3 семестр

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
192	192	
***1 академический час = 45 минутам**		

«Математика — это язык, на котором написана книга природы» Галилео Галилей.

Роль математики в физике сложно переоценить. Математический анализ, наряду с линейной алгеброй, – это тот фундамент, на который опирается любое физическое
образование. Данный курс лекций рассчитан на студентов физиков и представляет собой классический курс математического анализа и курс теории функции комплексной
переменной, являющийся его логическим продолжением. Наряду с классическими вопросами математического анализа - дифференциальное и интегральное исчисления
функций одной и многих переменных, числовые и функциональные ряды, криволинейные и поверхностные интегралы – в курсе будут затронуты некоторые вопросы теории множеств, а также рассмотрены ряды Фурье с точки зрения, как классического математического анализа, так и с точки зрения функционального анализа. На практических занятиях рассматриваются классические задачи математического анализа, иллюстрирующее теоретический материал, и позволяющие применять полученные теоретические знания для решения прикладных задач. Курс ТФКП познакомит обучающихся с основными вопросами и задачами комплексного анализа.

Содержание курса

1 семестр

Математический анализ

Структура курса

Разделы	**Лекции (Ак. ч.)**	**Практика (ак.ч.)**
1. Элементы теории множеств		
Понятие множества и основные операции над множествами. Понятие мощности множества. Сравнительный анализ множеств по мощности. Аксиоматика множества вещественных чисел (по Дедекинду).	16	16
2. Теория предела в метрическом пространстве.		
Понятие метрического пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их основные свойства. Теорема Больцано – Вейерштрасса и теорема о компактности для пространства $\mathbb{R}$ [illegible]. Предел последовательности в метрическом пространстве и его свойства. Фундаментальная последовательность в метрическом пространстве. Полное метрическое пространство. Предел функции в метрическом пространстве по Коши и по Гейне.	16	16
3. Числовая последовательность, функция вещественного аргумента.		
Основные свойства предела числовой последовательности и предела функции вещественного аргумента. Число Эйлера: e. Асимптотическое сравнение функций. Замечательные пределы. Теоремы и правила Штольца. Понятие непрерывности функции. Основные свойства непрерывных функций.	16	16
4. Дифференциальное исчисление функции вещественного аргумента.		
Понятие дифференцируемости и производной. Основные свойства дифференцируемых функций (в том числе «французские теоремы» о среднем, правила Лопиталя). Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Локальная и глобальная формулы Тейлора с остатками в различной форме. Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций. Локальный и глобальный экстремум функции. Необходимые, достаточные условия экстремума. Неравенства Юнга, Гёльдера, Коши - Буняковского. Выпуклые функции и их свойства. Достаточные условия для точки перегиба. Построение графика явно заданной функции с полным исследованием. Плоские кривые, заданные параметрическими уравнениями. Уравнение кривой в полярной системе координат.	16	16

2 семестр

Математический анализ

Структура курса

Разделы	Лекции (ак.ч.)	Практика (ак.ч.)
1.Интегральное исчисление функции вещественного аргумента		
Первообразная функции. Основные свойства неопределенного интеграла. Интеграл Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Интегрируемость функции. Критерий Лебега. Свойства определенного интеграла (в том числе формула Ньютона – Лейбница, теоремы о среднем, формула Валлиса, интегральные неравенства Гёльдера и Коши – Буняковского, лемма Римана – Лебега). Приложение определенного интеграла к вычислению длины пути, площади плоских фигур и объёма тела вращения. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: свойства, признаки сходимости (в том числе признаки Дирихле и Абеля). Формулы Фруллани.	21	21
2. Теория рядов		

Числовые ряды: свойства, признаки сходимости (в том числе признаки Куммера, Бертрана, Гаусса). Приведение несобственного интеграла к числовому ряду.Равномерная сходимости последовательности функций. Полнота пространства □□∞(Ω). Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей. Функциональные ряды: свойства, признаки сходимости. Степенные ряды. Формулы для вычисления радиуса сходимости (теорема Коши – Адамара). Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложения в ряд Маклорена основных функций. Произведение степенных рядов, подстановка ряда в ряд, деление степенных рядов. Примеры приложения теории степенных рядов к приближенным вычислениям	21	21
3. Интегралы, зависящие от параметра		
Равномерная сходимость семейства функций. Собственный интеграл, зависящий от параметра и его свойства. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра (1 и 2 –го рода). Признаки равномерной сходимости. Приведение несобственного интеграла, зависящего от параметра к функциональному ряду. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вычисление интегралов Дирихле, Эйлера-Пуассона, Лапласа, Френеля. Эйлеровы интегралы: Г – и В – функции. Асимптотический метод Лапласа. Формула Стирлинга. Метод стационарной фазы	22	22

3 семестр

Математический анализ

Структура курса

Разделы	**Лекции (ак.ч.)**	**Практика (ак.ч.)**
1.Ряды и интегралы Фурье		
Ортогональные системы функций. Определение коэффициентов и ряда Фурье. Классические ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса – Фишера для гильбертова пространства (сходимость ряда Фурье, экстремальное свойство коэффициентов Фурье, тождество Парсеваля). Базис в гильбертовом пространстве. Классические ряды Фурье для 2□□-периодических функций. Тождество Ляпунова. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации. Условия поточечной сходимости ряда Фурье. Ядро Фейера и его свойства. Суммирование ряда Фурье по Чезаро (теорема Фейера). Интеграл Фурье. Классическое преобразование Фурье. Теорема о достаточных условиях сходимости интеграла Фурье.	12	12
2.Теория функции нескольких переменных.		
Предел и непрерывность функции нескольких переменных (ф.н.п.). Дифференцируемость ф.н.п. Частные производные и дифференциал ф.н.п. Матрица Якоби. Основные правила дифференцирования ф.н.п. Частные производные высших порядков. Дифференциал k – го порядка. Формула Тейлора ф.н.п. с остатками в различной форме. Экстремумы ф.н.п. Необходимые, достаточных условиях экстремума. Производная по направлению и градиент ф.н.п. Геометрический смысл градиента. Линии, поверхности и гиперповерхности уровня. Касательная плоскость к графику функции. Уравнение нормали к касательной плоскости. Существование, непрерывность и дифференцируемость в точке неявно заданного отображения. Условный экстремум: постановка задачи, метод неопределенных множителей Лагранжа.	14	14
3. Кратные интегралы		
Интеграла Римана по n – мерному промежутку и его основные свойства. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Лебега интегрируемости функции. Допустимые множества. Мера Жордана множества и её геометрический смысл. Интеграл Римана по множеству и его свойства. Теорема Фубини. Общая формула замены координат в кратном интеграле. Несобственный кратный интеграл.	12	12
4.Криволинейные и поверхностные интегралы		
Поверхности в пространстве ℝ □□: карта, атлас поверхности. Ранг отображения, k – мерная касательная плоскость, элементарная гладкая поверхность. Ориентация в пространстве ℝ □□. Ориентация гладкой поверхности, двусторонние поверхности в пространстве ℝ □□. Ориентация замкнутой кривой. Край поверхности и его ориентация. Площадь элементарной гладкой поверхности в евклидовом пространстве. Основные геометрические характеристики скалярных и векторных полей (в том числе производные по направлению, векторные линии и т.п). Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода и второго рода: определение, физический смысл, вычисление. Дивергенция и ротор векторного поля. Теоремы Гаусса – Остроградского, Стокса, Грина. Потенциальное векторное поле. Соленоидальное векторное поле.	14	14
5. Дифференциальные формы (для желающих дополнительный мини курс		

Дифференциальные формы. Форма работы поля, форма потока поля: координатная форма записи. Внешний дифференциал формы и его свойства. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию. Криволинейный и поверхностный интеграл 2-го рода. Форма объема поверхности. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Общая формула Стокса.	12	12

Рекомендуемые ресурсы

1. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+564 с. Библ.: 54 назв. Илл.: 65. ISBN 978-5-4439-4029-8, 978-5-4439-4030-4 (часть I). https://matan.math.msu.su/media/uploads/2020/03/V.A.Zorich-Kniga-I-10-izdanie-Corr.pdf
2. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — Изд. 9-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+676 с. Библ.: 57 назв. Илл.: 41. ISBN 978-5-4439-1303-2, 978-5-4439-1305-6 (часть II). https://matan.math.msu.su/media/uploads/2020/03/V.A.Zorich-Kniga-II-9-izdanie-Temp-Corr-3.pdf
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. —Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL:https://e.lanbook.com/book/154399
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 2: Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/159505
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 12-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 3 — 2021. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-8779-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL:https://e.lanbook.com/book/180824
6. Рудин У. Основы математического анализа. (Principles of mathematical analysis, 1964) Автор: Уолтер Рудин (Walter Rudin). Перевод с английского В.П. Хавина. Художник А.Г. Антонова. Москва: Издательство «Мир»: Редакция литературы по математическим наукам, 1966) - 319 с. https://publ.lib.ru/ARCHIVES/R/RUDIN_Uolter/_Rudin_U..html
7. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. и доп. —Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 1: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость — 2010. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0306-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/2226
8. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 2: Интегралы. Ряды — 2009. — 504 с. — ISBN 978-5-9221-0307-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/2227
9. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 3: Функции нескольких переменных — 2003. — 472 с. — ISBN 5-9221-0308-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/2220
10. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. — 23-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 624 с. — ISBN 978-5-8114-6940-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/153688
11. Справочное пособие по высшей математике (АнтиДемидович). В 5-ти книгах. Т. 1—5 / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. — М: Едиториал УРСС. — 2003

Политика оценивания

Оценочные средства дисциплины: практическое занятие, контрольная работа, типовой расчет, коллоквиум, экзамен.

В каждом семестре предусмотрены коллоквиум (устный/письменный) и экзамен (устный). Баллы за практические занятия, в том числе контрольные работы, типовые расчеты, составляют от 40 до 50 баллов; за коллоквиум от 5 до 15 баллов; за экзамен от 15 до 30 баллов; за активную работу на занятиях от 0 до 5 баллов.
Итоговая оценка: 60-67 удвл (E); 67,1-74 удвл (D); 74,1-83 хор (C); 83,1-90 хор (B);
90,1-100 отл (A)

1 семестр
К.р.№1 «Предел функции»
К.р.№2 «Дифференцирование функции. Формула Тейлора»
Типовой расчет «Построение графика явно и параметрически заданных функции с полным исследованием»

2 семестр
К.р.№1 «Определенные интегралы. Исследование сходимости несобственного интеграла»
К.р.№2 «Исследование сходимости числовых и функциональных рядов. Степенные ряды»
Типовой расчет «Вычисление интегралов, зависящих от параметра»

3 семестр
К.р.№1 «Функция нескольких переменных»
К.р.№2 «Кратных интегралы»
К.р.№3 «Криволинейные и поверхностные интегралы»