

# Математический анализ

**Лекторы:**

Екатерина Кучерук  
Дмитрий Максимов

**Ассистент:**

Инга Андреева  
Арина Табиева  
Дмитрий Зезюлин

**Язык:**

Русский

**Трудоемкость:**

14 з.е.

**Образовательная программа:**

Теоретическая и экспериментальная  
физика

1,2,3 семестр

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
192	192	
*1 академический час = 45 минутам		

«Математика — это язык, на котором написана книга природы» Галилео Галилей.

Роль математики в физике сложно переоценить. Математический анализ, наряду с линейной алгеброй, – это тот фундамент, на который опирается любое физическое образование. Данный курс лекций рассчитан на студентов физиков и представляет собой классический курс математического анализа и курс теории функции комплексной переменной, являющийся его логическим продолжением. Наряду с классическими вопросами математического анализа - дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных, числовые и функциональные ряды, криволинейные и поверхностные интегралы - в курсе будут затронуты некоторые вопросы теории множеств, а также рассмотрены ряды Фурье с точки зрения, как классического математического анализа, так и с точки зрения функционального анализа. На практических занятиях рассматриваются классические задачи математического анализа, иллюстрирующее теоретический материал, и позволяющие применять полученные теоретические знания для решения прикладных задач. Курс ТФКП познакомит обучающихся с основными вопросами и задачами комплексного анализа.

# Содержание курса

## 1 семестр

### Математический анализ

#### Структура курса

Разделы	Лекции (Ак. ч.)	Практика (ак.ч.)
<b>1. Элементы теории множеств</b>		
Понятие множества и основные операции над множествами. Понятие мощности множества. Сравнительный анализ множеств по мощности. Аксиоматика множества вещественных чисел (по Дедекинду).	16	16
<b>2. Теория предела в метрическом пространстве.</b>		
Понятие метрического пространства. Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве и их основные свойства. Теорема Больцано – Вейерштрасса и теорема о компактности для пространства $\mathbb{R}^n$ . Предел последовательности в метрическом пространстве и его свойства. Фундаментальная последовательность в метрическом пространстве. Полное метрическое пространство. Предел функции в метрическом пространстве по Коши и по Гейне.	16	16
<b>3. Числовая последовательность, функция вещественного аргумента.</b>		
Основные свойства предела числовой последовательности и предела функции вещественного аргумента. Число Эйлера: $e$ . Асимптотическое сравнение функций. Замечательные пределы. Теоремы и правила Штольца. Понятие непрерывности функции. Основные свойства непрерывных функций.	16	16
<b>4. Дифференциальное исчисление функции вещественного аргумента.</b>		
Понятие дифференцируемости и производной. Основные свойства дифференцируемых функций (в том числе «французские теоремы» о среднем, правила Лопиталя). Производные и дифференциалы высших порядков и их свойства. Локальная и глобальная формулы Тейлора с остатками в различной форме. Разложения по формуле Маклорена основных элементарных функций. Локальный и глобальный экстремум функции. Необходимые, достаточные условия экстремума. Неравенства Юнга, Гёльдера, Коши - Буняковского. Выпуклые функции и их свойства. Достаточные условия для точки перегиба. Построение графика явно заданной функции с полным исследованием. Плоские кривые, заданные параметрическими уравнениями. Уравнение кривой в полярной системе координат.	16	16

## 2 семестр

### Математический анализ

#### Структура курса

Разделы	Лекции (ак.ч.)	Практика (ак.ч.)
<b>1. Интегральное исчисление функции вещественного аргумента</b>		
Первообразная функции. Основные свойства неопределенного интеграла. Интеграл Римана. Суммы Дарбу и их свойства. Интегрируемость функции. Критерий Лебега. Свойства определенного интеграла (в том числе формула Ньютона – Лейбница, теоремы о среднем, формула Валлиса, интегральные неравенства Гёльдера и Коши – Буняковского, лемма Римана – Лебега). Приложение определенного интеграла к вычислению длины пути, площади плоских фигур и объема тела вращения. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода: свойства, признаки сходимости (в том числе признаки Дирихле и Абеля). Формулы Фруллани.	21	21
<b>2. Теория рядов</b>		

Числовые ряды: свойства, признаки сходимости (в том числе признаки Куммера, Бертрана, Гаусса). Приведение несобственного интеграла к числовому ряду. Равномерная сходимости последовательности функций. Полнота пространства $C^{\infty}(\Omega)$ . Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей. Функциональные ряды: свойства, признаки сходимости. Степенные ряды. Формулы для вычисления радиуса сходимости (теорема Коши – Адамара). Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложения в ряд Маклорена основных функций. Произведение степенных рядов, подстановка ряда в ряд, деление степенных рядов. Примеры приложения теории степенных рядов к приближенным вычислениям	21	21
<b>3. Интегралы, зависящие от параметра</b>		
Равномерная сходимость семейства функций. Собственный интеграл, зависящий от параметра и его свойства. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра (1 и 2 –го рода). Признаки равномерной сходимости. Приведение несобственного интеграла, зависящего от параметра к функциональному ряду. Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вычисление интегралов Дирихле, Эйлера-Пуассона, Лапласа, Френеля. Эйлеровы интегралы: $\Gamma$ – и $\Psi$ – функции. Асимптотический метод Лапласа. Формула Стирлинга. Метод стационарной фазы	22	22

## 3 семестр

### Математический анализ

#### Структура курса

Разделы	Лекции (ак.ч.)	Практика (ак.ч.)
<b>1.Ряды и интегралы Фурье</b>		
Ортогональные системы функций. Определение коэффициентов и ряда Фурье. Классические ряды Фурье. Неравенство Бесселя. Теорема Рисса – Фишера для гильбертова пространства (сходимость ряда Фурье, экстремальное свойство коэффициентов Фурье, тождество Парсеваля). Базис в гильбертовом пространстве. Классические ряды Фурье для $2\pi$ -периодических функций. Тождество Ляпунова. Ядро Дирихле и его свойства. Принцип локализации. Условия поточечной сходимости ряда Фурье. Ядро Фейера и его свойства. Суммирование ряда Фурье по Чезаро (теорема Фейера). Интеграл Фурье. Классическое преобразование Фурье. Теорема о достаточных условиях сходимости интеграла Фурье.	12	12
<b>2.Теория функции нескольких переменных.</b>		
Предел и непрерывность функции нескольких переменных (ф.н.п.). Дифференцируемость ф.н.п. Частные производные и дифференциал ф.н.п. Матрица Якоби. Основные правила дифференцирования ф.н.п. Частные производные высших порядков. Дифференциал $k$ – го порядка. Формула Тейлора ф.н.п. с остатками в различной форме. Экстремумы ф.н.п. Необходимые, достаточных условиях экстремума. Производная по направлению и градиент ф.н.п. Геометрический смысл градиента. Линии, поверхности и гиперповерхности уровня. Касательная плоскость к графику функции. Уравнение нормали к касательной плоскости. Существование, непрерывность и дифференцируемость в точке неявно заданного отображения. Условный экстремум: постановка задачи, метод неопределенных множителей Лагранжа.	14	14
<b>3. Кратные интегралы</b>		
Интеграла Римана по $n$ – мерному промежутку и его основные свойства. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий Лебега интегрируемости функции. Допустимые множества. Мера Жордана множества и её геометрический смысл. Интеграл Римана по множеству и его свойства. Теорема Фубини. Общая формула замены координат в кратном интеграле. Несобственный кратный интеграл.	12	12
<b>4.Криволинейные и поверхностные интегралы</b>		
Поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ : карта, атлас поверхности. Ранг отображения, $k$ – мерная касательная плоскость, элементарная гладкая поверхность. Ориентация в пространстве $\mathbb{R}^3$ . Ориентация гладкой поверхности, двусторонние поверхности в пространстве $\mathbb{R}^3$ . Ориентация замкнутой кривой. Край поверхности и его ориентация. Площадь элементарной гладкой поверхности в евклидовом пространстве. Основные геометрические характеристики скалярных и векторных полей (в том числе производные по направлению, векторные линии и т.п). Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода и второго рода: определение, физический смысл, вычисление. Дивергенция и ротор векторного поля. Теоремы Гаусса – Остроградского, Стокса, Грина. Потенциальное векторное поле. Соленоидальное векторное поле.	14	14
<b>5. Дифференциальные формы (для желающих дополнительный мини курс</b>		

Дифференциальные формы. Форма работы поля, форма потока поля: координатная форма записи. Внешний дифференциал формы и его свойства. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию. Криволинейный и поверхностный интеграл 2-го рода. Форма объема поверхности. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Общая формула Стокса.	12	12
---	----	----

## Рекомендуемые ресурсы

1. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. — Изд. 10-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+564 с. Библ.: 54 назв. Илл.: 65. ISBN 978-5-4439-4029-8, 978-5-4439-4030-4 (часть I). <https://matan.math.msu.ru/media/uploads/2020/03/V.A.Zorich-Kniga-I-10-izdanie-Corr.pdf>
2. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. — Изд. 9-е, испр. — М.: МЦНМО, 2019. — xii+676 с. Библ.: 57 назв. Илл.: 41. ISBN 978-5-4439-1303-2, 978-5-4439-1305-6 (часть II). <https://matan.math.msu.ru/media/uploads/2020/03/V.A.Zorich-Kniga-II-9-izdanie-Temp-Corr-3.pdf>
3. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 1 — 2021. — 608 с. — ISBN 978-5-8114-7061-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/154399>
4. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 15-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 2: Курс дифференциального и интегрального исчисления — 2021. — 800 с. — ISBN 978-5-8114-7377-9. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/159505>
5. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 12-е изд., стер. — СанктПетербург: Лань, [б. г.]. — Том 3 — 2021. — 656 с. — ISBN 978-5-8114-8779-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/180824>
6. Рудин У. Основы математического анализа. (Principles of mathematical analysis, 1964) Автор: Уолтер Рудин (Walter Rudin). Перевод с английского В.П. Хавина. Художник А.Г. Антонова. Москва: Издательство «Мир»: Редакция литературы по математическим наукам, 1966) - 319 с. [https://publ.lib.ru/ARCHIVES/R/RUDIN\\_Uolter/\\_Rudin\\_U\\_.html](https://publ.lib.ru/ARCHIVES/R/RUDIN_Uolter/_Rudin_U_.html)
7. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 1: Предел. Непрерывность. Дифференцируемость — 2010. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0306-0. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2226>
8. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 2: Интегралы. Ряды — 2009. — 504 с. — ISBN 978-5-9221-0307-7. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2227>
9. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие / Л. Д. Кудрявцев, А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. — 2-е изд., перераб. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 3: Функции нескольких переменных — 2003. — 472 с. — ISBN 5-9221-0308-3. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2220>
10. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б. П. Демидович. — 23-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2021. — 624 с. — ISBN 978-5-8114-6940-6. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/153688>
11. Справочное пособие по высшей математике (АнтиДемидович). В 5-ти книгах. Т. 1—5 / Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. — М: Едиториал УРСС. — 2003

## Политика оценивания

**Оценочные средства дисциплины: практическое занятие, контрольная работа, типовой расчет, коллоквиум, экзамен.**

В каждом семестре предусмотрены коллоквиум (устный/письменный) и экзамен (устный). Баллы за практические занятия, в том числе контрольные работы, типовые расчеты, составляют от 40 до 50 баллов; за коллоквиум от 5 до 15 баллов; за экзамен от 15 до 30 баллов; за активную работу на занятиях от 0 до 5 баллов.

Итоговая оценка: 60-67 удвл (E); 67,1-74 удвл (D); 74,1-83 хор (C); 83,1-90 хор (B); 90,1-100 отл (A)

1 семестр

К.р.№1 «Предел функции»

К.р.№2 «Дифференцирование функции. Формула Тейлора»

Типовой расчет «Построение графика явно и параметрически заданных функции с полным исследованием»

2 семестр

К.р.№1 «Определенные интегралы. Исследование сходимости несобственного интеграла»

К.р.№2 «Исследование сходимости числовых и функциональных рядов. Степенные ряды»

Типовой расчет «Вычисление интегралов, зависящих от параметра»

3 семестр

К.р.№1 «Функция нескольких переменных»

К.р.№2 «Кратных интегралы»

К.р.№3 «Криволинейные и поверхностные интегралы»