

# Математическая физика

Лекторы:



**Язык:**

Русский

**Трудоемкость:**

6 з.е.

**Форма контроля:**

Экзамен

**Образовательная программа:**

Теоретическая и экспериментальная физика

4, 5 семестры

Беспроводные технологии

4, 5 семестры

**Пререквизиты:**

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

| Лекции<br>(ак.час)*               | Практические занятия<br>(ак.час) | Лабораторные занятия<br>(ак.час) |
|-----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 64                                | 64                               |                                  |
| *1 академический час = 45 минутам |                                  |                                  |

Дисциплина направлена на освоение студентами основных методов математической физики. Она предназначена для тех, кто намерен активно и осознанно использовать математический аппарат в физических исследованиях. Программа охватывает изучение основных методов теории уравнений в частных производных эллиптического, гиперболического и параболического типов (основного аппарата физики), теории интегральных уравнений, теории операторов, теории обобщенных функций, вариационного исчисления. Основная цель курса - сделать методы математической физики рабочим инструментом студентов, сориентированных на физические исследования, открыть для них общий математический взгляд на физические проблемы, который позволяет выявлять общие закономерности в разнородных физических явлениях.

# Содержание курса

## 4 семестр

### Уравнения математической физики

#### Структура курса

| Разделы   | Лекции<br>(ак.ч.) | Практика<br>(ак.ч.) |
|---|-------------------|---------------------|
| <b>1. Одномерное волновое уравнение</b>   |                   |                     |
| 1.1. Одномерное волновое уравнение. Метод Даламбера.<br>1.2. Метод продолжения. Метод продолжений для полуограниченной струны. Жесткое закрепление струны. Свободное закрепление струны. Конечная струна.<br>1.3. Метод Фурье для конечной струны.<br>1.4. Метод Фурье для свободного закрепления струны. Вынужденные колебания струны.   | 6                 | 2                   |
| <b>2. Одномерное уравнение теплопроводности</b>   |                   |                     |
| 2.1. Одномерное уравнение теплопроводности. Метод Фурье для конечного стержня.<br>2.2. Метод Фурье для конечного теплоизолированного стержня. Неоднородное уравнение теплопроводности.<br>2.3. Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня.<br>2.4. Задачи об установившихся процессах. Законы Фурье.<br>2.5. Метод подобия в теории теплопроводности. Задача о возрасте Земли.                      | 6                 | 4                   |
| <b>3. Уравнение Лапласа</b>   |                   |                     |
| 3.1. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге.<br>3.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.  | 2                 | 2                   |
| <b>4. Теоремы единственности</b>  |                   |                     |
| 4.1. Теорема единственности для уравнения струны. Теорема единственности для уравнения теплопроводности.<br>4.2. Формулы Грина в трехмерном случае. Следствия из формул Грина.<br>4.3. Теорема единственности для уравнения Лапласа. Вторая формула Грина в пространстве $n$  | 4                 |                     |
| <b>5. Классификация линейных уравнений в частных производных</b>  |                   |                     |
| 5.1. Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве $n$<br>5.2. Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве  | 2                 | 2                   |
| <b>6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора</b>   |                   |                     |
| 6.1. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля  | 2                 |                     |
| <b>7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа</b>  |                   |                     |
| 7.1. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Инвариантность функции Грина относительно перестановки аргументов.<br>7.2. Метод изображений. Функции Грина для различных двугранных углов. Функция для слоя между двумя параллельными плоскостями.<br>7.3. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.<br>7.4. Метод инверсий. Функция Грина задачи Дирихле для двух касающихся шаров. | 4                 | 4                   |
| <b>8. Уравнение Гельмгольца</b>   |                   |                     |
| 8.1. Уравнение Гельмгольца. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца.<br>8.2. Формулы Грина для оператора Гельмгольца в пространстве. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.   | 4                 | 4                   |
| <b>9. Специальные функции</b>   |                   |                     |
| 9.1. Ортогональные полиномы.<br>9.2. Уравнение Бесселя и цилиндрические функции.<br>9.3. Уравнение Гельмгольца в цилиндрических и сферических областях.   | 4                 |                     |

## Методы математической физики

## Структура курса

| Разделы   | Лекции<br>(ак. ч.) | Практика<br>(ак. ч.) |
|---|--------------------|----------------------|
| <b>1. Теория операторов</b>   |                    |                      |
| 1.1. Метрические пространства.<br>1.2. Линейные нормированные пространства.<br>1.3. Гильбертовы пространства. Линейные операторы.<br>1.4. Ограниченные и непрерывные операторы. Обратные операторы.<br>1.5. Симметрические и самосопряженные операторы. График оператора.<br>1.6. Замкнутый оператор. Резольвента оператора. Точечный спектр.<br>1.7. Непрерывный и остаточный спектры. Спектр самосопряженного оператора.  | 8                  | 8                    |
| <b>2. Обобщенные функции</b>  |                    |                      |
| 2.1. Пространства основных и обобщенных функций.<br>2.2. Действия с обобщенными функциями. Сингулярные обобщенные функции.<br>2.3. Решения дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций.  | 4                  | 4                    |
| <b>3. Интегральные уравнения</b>  |                    |                      |
| 3.1. Резольвента Фредгольма. Ряд Неймана. 37. Уравнение с вырожденным ядром.<br>3.2. Ряды Фредгольма для резольвенты. Диаграммная техника.<br>3.3. Теоремы Фредгольма для уравнения с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма.<br>3.4. Вторая теорема Фредгольма. Третья теорема Фредгольма. Уравнение Вольтерра.<br>3.5. Интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Интегральные уравнения с разностными ядрами.  | 8                  | 8                    |
| <b>4. Основные задачи вариационного исчисления</b>  |                    |                      |
| 4.1. Экстремум функционала. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума.<br>4.2. Интегральные функционалы.<br>4.3. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера.<br>4.4. Задача со свободными концами. Естественные граничные условия.<br>4.5. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.<br>4.6. Функционалы, зависящие от старших производных.<br>4.7. Изопериметрическая задача. Условный экстремум.<br>4.8. Общая формула первой вариации. Задача с подвижными концами.<br>4.9. Условие трансверсальности. Геодезические. Негладкие экстремали. Разрывные задачи первого и второго родов. Каноническая (гамильтонова) система. Уравнение Гамильтона-Якоби.<br>Инвариантность функционала. Теорема Нётер. Прямые методы поиска экстремума. Прямые методы поиска собственных значений и собственных функций. | 12                 | 12                   |

## Рекомендуемые ресурсы

- Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2018 – 39 с.  
[https://books.ifmo.ru/book/2189/tipovoy\\_raschet\\_po\\_matematicheskoy\\_fizike:\\_uchebno-metodicheskoe\\_posobie\\_/recenzenty:\\_miroshnichenko\\_g.\\_p.\\_uzdin\\_v.\\_m..htm](https://books.ifmo.ru/book/2189/tipovoy_raschet_po_matematicheskoy_fizike:_uchebno-metodicheskoe_posobie_/recenzenty:_miroshnichenko_g._p._uzdin_v._m..htm)
- Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2004. – 400 с.
- Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа. СанктПетербург: Лань, 2015. – 400 с.
- Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. – 798 с.
- Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. - 848 с.
- Блинова И.В., Попов И.Ю., Трифанова Е.С. Типовые расчеты по функциональному анализу. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2011 – 24 с. [https://books.ifmo.ru/book/647/tipovye\\_raschety\\_po\\_funkcionalnomu\\_analizu.htm](https://books.ifmo.ru/book/647/tipovye_raschety_po_funkcionalnomu_analizu.htm)
- Попов И.Ю. Математическая физика. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2005 –105 с.
- Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2009 – 59 с.  
[https://books.ifmo.ru/book/488/prosteyshie\\_uravneniya\\_matematicheskoy\\_fiziki\\_uchebnoe\\_posobie.htm](https://books.ifmo.ru/book/488/prosteyshie_uravneniya_matematicheskoy_fiziki_uchebnoe_posobie.htm)
- И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подivilов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики. Изд. 4-е. - Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009 – 288 с.

## Тип самостоятельных заданий

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u'_x(4, t) = 0 \\ u(x, 0) = -x \\ u'_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) = x - x^2 \end{cases}$$

### Примеры экзаменационных вопросов:

Экзаменационный билет № 1

1. Вопрос. Уравнение струны. Метод характеристик. Метод продолжения
2. Вопрос. Метрические и линейные нормированные пространства.

3\* \_\_\_\_\_

Экзаменационный билет № 2

1. Вопрос. Разделение переменных в однородном уравнении
2. Вопрос. Гильбертовы пространства.

3\* \_\_\_\_\_