Математическая физика

Лекторы:

faculty of PHYSICS

Язык:
Русский

Трудоемкость:

6 з.е.

Форма контроля:

Экзамен

Образовательная программа:

Теоретическая и экспериментальная физика

4, 5 семестры

Беспроводные технологии

4, 5 семестры

Пререквизиты:

Математический анализ

Дифференциальные уравнения

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
64	64	
*1 академический час = 45 минутам		

Дисциплина направлена на освоение студентами основных методов математической физики. Она предназначена для тех, кто намерен активно и осознанно использовать математический аппарат в физических исследованиях. Программа охватывает изучение основных методов теории уравнений в частных производных эллиптического, гиперболического и параболического типов (основного аппарата физики), теории интегральных уравнений, теории операторов, теории обобщенных функций, вариационного исчисления. Основная цель курса – сделать методы математической физики рабочим инструментом студентов, сориентированных на физические исследования, открыть для них общий математический взгляд на физические проблемы, который позволяет выявлять общие закономерности в разнородных физических явлениях.

Содержание курса

4 семестр

Уравнения математической физики

Структура курса

Разделы	**Лекции (ак.ч.)**	**Практика (ак.ч.)**
1. Одномерное волновое уравнение		
1.1. Одномерное волновое уравнение. Метод Даламбера. 1.2. Метод продолжения. Метод продолжений для полуограниченной струны. Жесткое закрепление струны. Свободное закрепление струны. Конечная струна. 1.3. Метод Фурье для конечной струны. 1.4. Метод Фурье для свободного закрепления струны. Вынужденные колебания струны.	6	2
2. Одномерное уравнение теплопроводности		
2.1. Одномерное уравнение теплопроводности. Метод Фурье для конечного стержня. 2.2. Метод Фурье для конечного теплоизолированного стержня. Неоднородное уравнение теплопроводности. 2.3. Уравнение теплопроводности с неоднородными краевыми условиями. Уравнение теплопроводности для бесконечного стержня. 2.4. Задачи об установившихся процессах. Законы Фурье. 2.5. Метод подобия в теории теплопроводности. Задача о возрасте Земли.	6	4
3. Уравнение Лапласа		
3.1. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. 3.2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике.	2	2
4. Теоремы единственности		
4.1. Теорема единственности для уравнения струны. Теорема единственности для уравнения теплопроводности. 4.2. Формулы Грина в трехмерном случае. Следствия из формул Грина. 4.3. Теорема единственности для уравнения Лапласа. Вторая формула Грина в пространстве n	4	
5. Классификация линейных уравнений в частных производных		
5.1. Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве n 5.2. Классификация линейных уравнений в частных производных в пространстве	2	2
6. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора		
6.1. Функция Грина обыкновенного дифференциального оператора. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля	2	
7. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа		
7.1. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Инвариантность функции Грина относительно перестановки аргументов. 7.2. Метод изображений. Функции Грина для различных двугранных углов. Функция для слоя между двумя параллельными плоскостями. 7.3. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. 7.4. Метод инверсий. Функция Грина задачи Дирихле для двух касающихся шаров.	4	4
8. Уравнение Гельмгольца		
8.1. Уравнение Гельмгольца. Задача Дирихле для уравнения Гельмгольца. 8.2. Формулы Грина для оператора Гельмгольца в пространстве. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца.	4	4
9. Специальные функции		
9.1. Ортогональные полиномы. 9.2. Уравнение Бесселя и цилиндрические функции. 9.3 Уравнение Гельмгольца в цилиндрических и сферических областях.	4	

5 семестр

Методы математической физики

Структура курса

Разделы	Лекции (ак. ч.)	Практика (ак. ч.)
1. Теория операторов		
1.1. Метрические пространства. 1.2. Линейные нормированные пространства. 1.3. Гильбертовы пространства. Линейные операторы. 1.4. Ограниченные и непрерывные операторы. Обратные операторы. 1.5. Симметрические и самосопряженные операторы. График оператора. 1.6. Замкнутый оператор. Резольвента оператора. Точечный спектр. 1.7. Непрерывный и остаточный спектры. Спектр самосопряженного оператора.	8	8
2. Обобщенные функции		
2.1. Пространства основных и обобщенных функций. 2.2. Действия с обобщенными функциями. Сингулярные обобщенные функции. 2.3. Решения дифференциальных уравнений в классе обобщенных функций.	4	4
3. Интегральные уравнения		
3.1. Резольвента Фредгольма. Ряд Неймана. 37. Уравнение с вырожденным ядром. 3.2. Ряды Фредгольма для резольвенты. Диаграммная техника. 3.3. Теоремы Фредгольма для уравнения с вырожденным ядром. Альтернатива Фредгольма. 3.4. Вторая теорема Фредгольма. Третья теорема Фредгольма. Уравнение Вольтерра. 3.5. Интегральные преобразования Фурье и Лапласа. Интегральные уравнения с разностными ядрами.	8	8
4. Основные задачи вариационного исчисления		
4.1. Экстремум функционала. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума. 4.2. Интегральные функционалы. 4.3. Задача с закрепленными концами. Уравнение Эйлера. 4.4. Задача со свободными концами. Естественные граничные условия. 4.5. Функционалы, зависящие от нескольких функций. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных. 4.6. Функционалы, зависящие от старших производных. 4.7. Изопериметрическая задача. Условный экстремум. 4.8. Общая формула первой вариации. Задача с подвижными концами. 4.9. Условие трансверсальности. Геодезические. Негладкие экстремали. Разрывные задачи первого и второго родов. Каноническая (гамильтонова) система. Уравнение Гамильтона-Якоби. Инвариантность функционала. Теорема Нётер. Прямые методы поиска экстремума. Прямые методы поиска собственных значений и собственных функций.	12	12

Рекомендуемые ресурсы

1. Лобанов И.С., Попов А.И., Попов И.Ю., Трифанов А.И. Типовой расчет по математической физике. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2018 – 39 с. https://books.ifmo.ru/book/2189/tipovoy_raschet_po_matematicheskoy_fizike:_uchebno-metodicheskoe_posobie_/_recenzenty:_miroshnichenko_g._p.,_uzdin_v._m..htm
2. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. Москва: Физматлит, 2004. – 400 с.
3. Власова Е.А., Марчевский И.К. Элементы функционального анализа. СанктПетербург: Лань, 2015. – 400 с.
4. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2004. – 798 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том II / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. - 848 с.
6. Блинова И.В., Попов И.Ю., Трифанова Е.С. Типовые расчеты по фунциональному анализу. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2011 – 24 с. https://books.ifmo.ru/book/647/tipovye_raschety_po_funkcionalnomu_analizu.htm
7. Попов И.Ю. Математическая физика. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2005 –105 с.
8. Блинова И.В., Попов И.Ю. Простейшие уравнения математической физики. Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 2009 – 59 с. https://books.ifmo.ru/book/488/prosteyshie_uravneniya_matematicheskoy_fiziki._uchebnoe_posobie.htm
9. И.В., Кузнецов Е.А., Мильштейн А.И., Подивилов Е.В., Черных А.И., Шапиро Д.А., Шапиро Е.Г. Задачи по математическим методам физики. Изд. 4-е. - Москва: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009 – 288 с.

Тип самостоятельных заданий

Решить начально-краевую задачу для уравнения струны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,\mathrm{t}) = \mathrm{u}'_x(4,\mathrm{t}) = 0 \\ \mathrm{u}(x,0) = -x \\ \mathrm{u}'_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Решить начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \mathrm{u}(0,\mathrm{t}) = \mathrm{u}(1,\mathrm{t}) = 0 \\ \mathrm{u}(x,0) = x - x^2 \end{cases}$$

Примеры экзаменационных вопросов:

Экзаменационный билет № 1
1. Вопрос. Уравнение струны. Метод характеристик. Метод продолжения
2. Вопрос. Метрические и линейные нормированные пространства.
3*____

Экзаменационный билет № 2
1. Вопрос. Разделение переменных в однородном уравнении
2. Вопрос. Гильбертовы пространства.
3*____