

# Теория групп

**Лекторы:**  
Андрей Мудров



**Язык:**  
Русский

**Трудоемкость:**  
3 з.е.

**Форма контроля:**  
Экзамен

**Образовательная программа:**

Теоретическая и экспериментальная физика  
5 семестр  
Беспроводные технологии  
5 семестр

**Пререквизиты:**

Линейная алгебра  
Общая физика: механика  
Математический анализ

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
32	32	
*1 академический час = 45 минутам		

В курсе излагаются основные понятия и результаты теории групп и их представлений, лежащие в основе математических методов симметричного анализа физических систем. Помимо дискретных групп конечного порядка, которым в курсе уделено основное внимание, студенты также познакомятся с примерами основных матричных непрерывных групп, таких как полная линейная, ортогональная и унитарные группы. Студенты узнают, как классифицируются собственные состояния различных физических систем, как выводятся правила отбора и определяются независимые компоненты материальных тензоров.

# Содержание курса

## 5 семестр

### Теория групп

#### Структура курса

Разделы	Лекции (ак. ч.)	Практика (ак. ч.)
<b>1. Конечные группы</b>		
<ul style="list-style-type: none"><li>Аксиомы группы, таблицы умножения для конечных групп, подгруппы, нормальные подгруппы, фактор-группы, гомоморфизмы, прямое произведение групп. Абелевы группы. Циклические группы.</li></ul>	4	4
<b>2. Представления конечных групп</b>		
<ul style="list-style-type: none"><li>Геометрическая мотивация: действие группы на множествах, орбиты. Левое и правое действие группы на себе. Классы смежности. Теорема Лагранжа. Симметрические группы, диэдральная группа.</li><li>Группа обратимых линейных преобразований. Представления групп. Гомоморфизмы представлений. Квантово-механическая интерпретация.</li><li>Операции с представлениями: тензорные произведения, прямые суммы. Инвариантные подпространства. Теорема Машке для конечных групп, полная приводимость.</li><li>Неприводимые представления, кратности, изотипические компоненты. Теорема Шура.</li><li>Действие группы на себе сопряжением, классы сопряженности, центральные функции, характеры, операции с характерами. Регулярное представление.</li><li>Классификация неприводимых представлений с помощью классов сопряженности.</li><li>Структура регулярного представления, теорема Бернсайда.</li><li>Таблицы характеров.</li><li>Соотношения ортогональности для функций на группе.</li><li>Групповая алгебра.</li><li>Индукцированные представления. Теорема Фробениуса.</li><li>Классы сопряженности симметрической группы.</li><li>Диаграммы и таблицы Юнга, симметризаторы Юнга.</li><li>Неприводимые представления симметрической группы.</li><li>Точечные группы, классификация. Таблицы характеров.</li></ul>	16	16
<b>3. Кристаллографические группы</b>		
<ul style="list-style-type: none"><li>Свободные Абелевы группы (решетки), кристаллографические группы, классификация сингоний.</li></ul>	4	4
<b>4. Группы и алгебры Ли</b>		
<ul style="list-style-type: none"><li>Задача о нормальных колебательных модах молекулярных систем.</li><li>Группа <math>SO(3)</math> и ее алгебра Ли. Оператор углового момента.</li><li>Конечномерные представления <math>SO(3)</math>.</li><li>Двузначные представления <math>SO(3)</math>, группа <math>SU(2)</math> и гомоморфизм <math>SU(2) \rightarrow O(3)</math></li><li>Разложение тензорного произведения представлений <math>SO(3)</math>. Коэффициенты Клебша-Гордана.</li><li>Квантовая механика свободного атома, приложение теории групп.</li><li>Спин, спин-орбитальное взаимодействие, расщепление уровней энергии, правила отбора.</li></ul>	8	8

#### Рекомендуемые ресурсы

- В. Хейне, Теория групп в квантовой механике. М.: ИЛ, 1963. - С. - 522.
- Исаев А. П., Рубаков В. А. Теория групп и симметрий. Конечные группы. Группы и алгебры Ли. — Москва, Россия: URSS, 2018. — С. 504.
- Dresselhaus M. S., Dresselhaus G., Jorio A. Group Theory. Application to the Physics of Condensed Matter. - Berlin: Springer, 2008. - P. 582.
- Ramond P. Group Theory. A Physicist's Survey. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2010.-P 310.

5. Zee A. Group Theory in a Nutshell for Physicists. — Woodstock, UK: Princeton University Press, 2016. -P. 613.
6. Wolfram T., Ellialtioglu S. Applications of Group Theory to Atoms, Molecules, and Solids. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2014. — P. 471.
7. El-Batanouny M., Wooten F. Symmetry and Condensed Matter Physics. — 4th edition. — Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2008. -P. 922.
8. Hergert W., Geilhufe R. M. Group Theory in Solid State Physics and Photonics. Problem Solving with Mathematica. - Weinheim, Germany : Wiley, 2018. - P. 364.
9. Geilhufe R. M., Hergert W. Gtpack: A Mathematica Group Theory Package for Application in Solid- State Physics and Photonics // Frontiers in Physics. — 2018. — Vol. 6. — P. 86.

## **Политика оценивания**

**Оценочные средства дисциплины: домашнее задание, практическое задание, контрольная работа, коллоквиум, экзамен.**

В течение семестра необходимо выполнить домашние и практические задания (не менее 75% от общего объема) и контрольную работу №1, что в совокупности является допуском к коллоквиуму. Для допуска к экзамену также необходимо решить контрольные работы № 2.

Максимальное число баллов за курс - 100, минимальное - 60.

Работа на практиках - 15 баллов

Домашние задания - 30 баллов

Контрольная № 1 - 10 баллов

Коллоквиум - 15 баллов

Контрольная № 2 - 10 баллов

Экзамен - 20 баллов

Оценка формируется исходя из количества баллов: от 90 до 100 - «отлично», от 74 до 90 - «хорошо», от 60 до 74 - «удовлетворительно».

## **Тип самостоятельных заданий**

Пример заданий:

Задача 1. Найдите все запрещенные квадрупольные переходы в группе  $T_d$  (без конкретного вида компонент, только irreps уровней, для которых точно 0).

Задача 2. Докажите, что для взаимно простых  $p$  и  $q$   $Z_{pq}$  изоморфно прямому произведению  $Z_p$  и  $Z_q$ .