

Методы оптимизации

Лекторы:

Павел Петтай



Язык:

Русский

Трудоемкость:

8 з.е.

Форма контроля:

экзамен

Образовательная программа:

Теоретическая и экспериментальная физика

6, 7 семестры

Пререквизиты:

Линейная алгебра

Математический анализ

Лекции (ак.час)*	Практические занятия (ак.час)	Лабораторные занятия (ак.час)
32	32	
*1 академический час = 45 минутам		

На Физическом факультете Университета ИТМО курс Методы оптимизации изучается 2 семестра: в весеннем семестре 6-го курса и в осеннем семестре 7-ого курса. Курс является обязательным для студентов специализации «Моделирование физических процессов». Стандартная учебная нагрузка – 4 академических часа в неделю в каждом семестре. Отчётность – экзамен (в каждом семестре).

Внутри каждого семестра многие темы органично связаны между собой, но между семестрами являются независимыми.

В весеннем семестре 6-го курса изучается Линейное программирование – методы решения задач условной оптимизации в конечномерных евклидовых пространствах. Особенностью таких задач является то, что целевая функция является линейной (либо аффинной, что совершенно не меняет ситуацию), все ограничения также заданы линейными функциями. В частности, рассматриваются задачи целочисленной линейной оптимизации, исследуется устойчивость решений при изменении параметров модели, решаются задачи параметрической линейной оптимизации. Особое внимание уделяется построению математических моделей. Курс начинается с изучения элементов Выпуклого анализа, необходимого для обоснования изучаемых далее методов решения задач. Линейное программирование имеет множество приложений экономике, менеджменте, финансах, теории игр и во многих других науках.

В осеннем семестре 7-ого курса основное внимание уделяется решению задач Нелинейного программирования. К необходимости нелинейной оптимизации приводят многие задачи оптимального проектирования, анализа данных, машинного обучения, управления запасами, экономики, принятия решений и т.д. Курс начинается с изучения аналитических и численных методов оптимизации функции одного вещественного переменного. Далее изучаются аналитические и численные методы решения задач условной и безусловной оптимизации функций многих переменных.

Содержание курса

6 семестр

«Методы оптимизации (Линейное программирование)»

Структура курса

Разделы	Лекция (ак.ч.)	Практика (ак.ч.)
1. Этапы построения математической модели. Примеры некоторых классических задач линейного программирования (простейшая задача производственного планирования, задача о диете, задачи о раскрое, станковые задачи с комплектацией и без и др.)		
2. Эквивалентные экстремальные задачи. Общая и каноническая задачи линейного программирования. Матричная запись. Переход от ОЗЛП к КЗЛП	2	2
3. Первая геометрическая интерпретация ЗЛП. Графическое решение ЗЛП с двумя переменными. Графическое решение КЗЛП специального вида.		
4. Элементы выпуклого анализа: 4.1. Выпуклые множества 4.2. Аффинные множества 4.3. Конусы 4.4. Выпуклые и аффинные комбинации и оболочки 4.5. Внутренние и крайние точки множества 4.6. Многогранные выпуклые множества	2	2
5. Основные теоремы линейного программирования. Вторая геометрическая интерпретация КЗЛП.		
6. Основная идея симплекс-метода (нестрогий вывод из геометрических соображений).		
7. Схема и табличная реализация симплекс-алгоритма.	2	2
8. Строгое обоснование всех основных этапов симплекс-метода.		
9. Метод минимизации невязок для поиска допустимого базисного плана.		
10. Модифицированный симплекс-метод.	2	2
11. Понятие двойственности в линейном программировании.		
12. Теоремы двойственности.		
13. Экономическая интерпретация двойственных переменных и некоторых теорем.	2	2
14. Двойственный симплекс-метод.		
15. Анализ параметрической устойчивости: 15.1. Относительно вариации вектора ограничений 15.2. Относительно вариации одной из компонент целевой функции 15.3. Относительно вариации одной из компонент небазисного столбца матрицы условий.	2	2
16. Задача линейного программирования с параметром в векторе целевой функции.		
17. Задача линейного программирования с параметром в векторе ограничений.		
18. Задачи целочисленного программирования. 18.1. Постановка проблемы 18.2. Задача о ранце (или оптимальная загрузка судна) 18.3. Метод Гомори	2	2
19. Постановка транспортной задачи. Классификация. Матричная и табличная запись.		
20. Алгоритмы нахождения допустимого базисного плана транспортной задачи.		
21. Метод потенциалов для транспортной задачи.	2	2
22. Задача о назначениях.		

7 семестр

«Методы оптимизации (Нелинейное программирование)»

Структура курса

Разделы	Лекция (ак.ч.)	Практика (ак.ч.)
Глава I: Методы оптимизации функции одного переменного		
1. Примеры задач нелинейного программирования.		
2. Аналитические методы оптимизации дифференцируемых функций одного вещественного переменного.		
3.1. Определение и геометрический смысл 3.2. Некоторые свойства выпуклых функций 3.3. Дифференциальные критерии выпуклости		
4. Неравенство Йенсена и некоторые другие аналитические неравенства: 4.1. Неравенство Йенсена 4.2. Обобщённое неравенство о средних 4.3. Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского 4.5. Примеры применения в задачах оптимизации		
5. Прямые численные методы одномерной оптимизации функции одного переменного: 5.1. Метод перебора 5.2. Метод поразрядного поиска 5.3. Метод дихотомии 5.4. Метод золотого сечения 5.5. Метод парабол	6	6
6. Численные методы одномерной оптимизации, использующие информацию о производной функции: 6.1. Метод хорд 6.2. Метод касательных (метод Ньютона) 6.3. Метод одной касательной 6.4. Метод Ньютона-Рафсона 6.5. Метод Марквардта 6.6. Метод средней точки		
7. Численные методы одномерной оптимизации неунимодальных функций: 7.1. Липшицевы функции и метод перебора 7.2. Метод ломаных		
Глава II: Общие аналитические методы безусловной нелинейной оптимизации функции многих переменных		
1. Применение аналитических неравенств в решении задач одномерной и многомерной оптимизации.		
2. Линии и поверхности уровня. Примеры графического подхода к решению нелинейной задачи оптимизации функции двух переменных.		
3. Производная по направлению. Градиент и его основные свойства.		
4. Матрица Гессе. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (2-ого порядка).	2	2
5. Квадратичные формы (основные факты по теме из курса линейной алгебры).		
6. Необходимые и достаточны условия безусловного экстремума дифференцируемых функций многих переменных.		
7. Дифференциальные критерии выпуклости функции многих переменных.		
Глава III: Численные методы безусловной оптимизации дифференцируемых функций многих переменных		
1. Квадратичные функции. Общие принципы многомерной минимизации.		
2. Методы градиентного спуска: 2.1. Метод дробления шага. 2.2. Методы градиентного и наискорейшего спуска. 2.3. Теорема о достаточных условиях сходимости градиентных методов для квадратичных функций.		
3. Метод сопряжённых направлений.	2	2
4. Метод сопряжённых градиентов.		
5. Метод Ньютона-Рафсона.		
6. Квазиньютоновские методы.		

Глава IV: Прямые методы безусловной многомерной оптимизации		
1. Постановка проблемы.		
2. Оптимизация по регулярному симплексу.		
3. Оптимизация по нерегулярному симплексу.		
4. Метод циклического покоординатного спуска.	2	2
5. Метод Хука-Дживса.		
6. Идея методов случайного поиска.		
7. Основные идеи и понятия генетических алгоритмов		
Глава V: Многомерная оптимизация при наличии ограничений		
1. Функция Лагранжа. Необходимые условия экстремума 1-ого порядка.		
2. Необходимые условия экстремума 2-ого порядка. Достаточные условия экстремума.		
3. Условный экстремум при наличии ограничений, заданных неравенствами.	2	2
4. Теорема Куна-Таккера. Условия регулярности.		
5. Элементы теории двойственности в нелинейном программировании.		
Глава VI: Подходы к решению задач многоцелевой оптимизации		
1. Метод главной компоненты.		
2. Метод уступок.		
3. Метод комплексного показателя.		
4. Метод Гермейера.	2	2
5. Метод справедливого компромисса.		
6. Метод условного центра масс.		
7. Метод идеальной точки.		

Рекомендуемые ресурсы

По линейному программированию, основная:

1. Колюховский П.В. – Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. Ун-та, 2008. – 395 с

Дополнительная:

1. Таха, Хемди А. – Введение в исследование операций, 7-е издание.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Жадан В.Г. – Методы оптимизации. Ч.I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации: учебное пособие/ В.Г. Жадан. – М.: МФТИ, 2014. – 241 с.

По нелинейному программированию, основная:

1. Гончаров В.А. – Методы оптимизации: учебное пособие/ В.А. Гончаров. – М.: Высшее образование, 2009. – 191 с

Дополнительная:

1. Таха, Хемди А. – Введение в исследование операций, 7-е издание.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.
2. Воронцова Е.А., Хильдебранд Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С. – Выпуклая оптимизация: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2021. – 364 с.
3. Нестеров Ю.Е. – Методы выпуклой оптимизации. – М.: МЦНМО, 2010. – 281 с.
4. Пантелеев А.В. – Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие/ А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 2-е изд., исправл. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.
5. Галеев Э.М. – Оптимизация: Теория, примеры, задачи: учебное пособие. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010. – 336 с.
6. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. – Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учеб. Пособие. – 2-е изд.. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005 – 256 с.

Политика оценивания

Оценочные средства дисциплины: контрольная работа, тест, индивидуальное задание, экзамен, дополнительный вопрос на экзамене.

В середине и в конце семестра студенты пишут на занятии контрольную работу, оцениваемую в 15 баллов (каждую) и закрытый тест по теории, оцениваемый в 10 баллов (каждый).

Каждый студент получает индивидуальное задание. В весеннем семестре необходимо запрограммировать некоторый алгоритм оптимизации, в осеннем - написать отчёт о решении некоторой оптимизационной задачи с использованием различных алгоритмов, рассмотренных на занятии с помощью каких-либо программных средств, при этом должны быть реализованы все этапы алгоритма. Индивидуальное задание сдаётся в устной форме, отчёт распечатывается либо пересылается преподавателю. Чаще всего индивидуальные задания сдаются на консультации перед экзаменом, если студент готов, то ему будет предоставлена возможность сдать это задание раньше. Индивидуальное задание сдаётся устно и оценивается в 20 баллов.

На экзамене студент получает 4 открытых вопроса на знание и понимание основных определений, формул, формулировок теорем и утверждений. Ответ на эти вопросы оценивается в 10 баллов, вопросы студентам заранее неизвестны.

Дополнительно студент на экзамене получает вопрос, требующий подробного ответа, включающего все выводы и доказательства. Вопрос может состоять из нескольких взаимосвязанных частей. Студенты заранее знают, какие вопросы им могут попасться. Ответ на вопрос проводится в письменной либо в смешанной письменно-устной форме. Этот вопрос оценивается в 20 баллов.

Баллы за все формы отчётности суммируются. Удовлетворительную оценку получают студенты, набравшие не менее 60 баллов, но не более 74 баллов, хорошую - студенты, набравшие более 74, но менее 90 баллов, отличную - студенты, набравшие не менее 90 баллов.